Analysis 3 - Klausur - Lösung

Aufgabe 1: Sigma-Algebren (4+6 Punkte)

a) Sei X eine Menge. Sei $\mathcal{F} = \{\{x\} : x \in X\}$. Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{F})$.

b) Sei X eine Menge, Sei $S \subset \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie: Für $A \in \sigma(S)$ existiert $S_0 \subset S$ sodass S_0 abzählbar ist und $A \in \sigma(S_0)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$\mathcal{A} = \bigcup \{\sigma(C) : C \subset S \text{ abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra ist, und, dass $S \subset \mathcal{A}$.

Lösung:

a) Sei $\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ abzählbar oder } X \setminus A \text{ abzählbar}\}$. Wir behaupten, dass $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$ ist.

"$\supseteq$": Jede abzählbare Menge $A = \{x_i : i \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}$ ist in $\sigma(\mathcal{F})$, und damit auch jede Menge mit abzählbarem Komplement. Also ist $\sigma(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{A}$.

"$\subseteq$": Wir zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. Dann muss schon $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$ sein.

- $\emptyset \in \mathcal{A}$, da $\emptyset$ abzählbar ist.
- Wenn $A \in \mathcal{A}$ ist, dann ist auch $X \setminus A \in \mathcal{A}$, da $X \setminus (X \setminus A) = A$ ist.
- Seien $A_i \in \mathcal{A}$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann sind entweder alle A_i abzählbar und somit auch $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, oder es gibt $j \in \mathbb{N}$ mit $X \setminus A_j$ abzählbar. Dann ist $X \setminus \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}(X \setminus A_i) \subseteq X \setminus A_j$ abzählbar. Insgesamt ist also $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.
- Wenn $A = \{x\} \in \mathcal{F}$ ist, ist es abzählbar, und somit $A \in \mathcal{A}$. Also ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$.

b) Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist:

- $\emptyset \in \sigma(\emptyset) = \{\emptyset, X\}$. $\emptyset \subseteq S$ ist abzählbar, also ist $\emptyset \in \mathcal{A}$.

- Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $A \in \sigma(C)$ für ein abzählbares $C \subseteq S$, und somit auch $X \setminus A$. Also ist $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

- Sei $A_i \in \mathcal{A}$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann existieren abzählbare $C_i \subseteq S$ mit $A_i \in \sigma(C_i)$. Die Menge $C = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ ist eine abzählbare Teilmenge von S. Da $C_i \subseteq C$ ist und σ monoton ist, ist $A_i \in \sigma(C)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und damit auch $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \sigma(C) \subseteq \mathcal{A}$.

Als nächstes zeigen wir, dass $S \subseteq \mathcal{A}$ ist. Sei $A \in S$, dann ist $\{A\} \subseteq S$ abzählbar und $A \in \sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$. Also ist $A \in \mathcal{A}$.

Damit ist der Hinweis gezeigt. Da also $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, die S enthält, ist $\sigma(S) \subseteq \mathcal{A}$. Das bedeutet, dass für jedes $A \in \sigma(S)$ ein abzählbares $S_0 \subseteq S$ existiert mit $A \in \sigma(S_0)$.

Aufgabe 2: Fubini (5+5 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0, x \leq y < x+1 \\ -1 & \text{falls } x \geq 0, x+1 \leq y < x+2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(x) \right] d\lambda(y) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(y) \right] d\lambda(x)$$

Erklären Sie, warum das Ergebnis Ihrer Rechnung nicht im Widerspruch zum Satz von Fubini steht.

b) Sei $A = (0;1) \times (0;1) \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_A \frac{1}{x^2 + y} d\lambda_2(x,y)$$

endlich ist.

Hinweis: Versuchen Sie nicht den Wert des Integrals zu bestimmen.

Lösung a):
Fixiere zunächst $x \in \mathbb{R}^+$. Es gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, \mathrm{d}\lambda(y) = \int_x^{x+1} 1 \, \mathrm{d}\lambda(y) - \int_{x+1}^{x+2} 1 \, \mathrm{d}\lambda(y) = 1 - 1 = 0$$

also insbesondere auch

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, \mathrm{d}\lambda(y)\lambda(x) = 0.$$

Fixiere nun $y \in \mathbb{R}$. Die Bedingung $x \leq y \leq x+1$ ist äquivalent zu $y-1 \leq x \leq y$. Die Bedingung $y+1 \leq x \leq y+2$ ist äquivalent zu $y-2 \leq x \leq y-1$. Hinzu kommt aber die Nebenbedigung $x \geq 0$. Das Integral unterscheidet sich also je nach dem ob $y \in [0,1]$, $y \in [1,2]$ oder $y \in [2,\infty)$. We therfore get

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ \mathrm{d}\lambda(x)\ \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int_{[0,1]} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ \mathrm{d}\lambda(x)\ \mathrm{d}\lambda(y) + \int_{[1,2]} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ \mathrm{d}\lambda(x)\ \mathrm{d}\lambda(y) + \int_{[2,\infty)} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ \mathrm{d}\lambda(x)\ \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int_{[0,1]} \int_0^y 1\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \int_{[1,2]} 1 - \int_0^{y-1} 1\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \int_{[2,\infty)} 0\ \mathrm{d}y \\
&= \int_{[0,1]} y\ \mathrm{d}y + \int_{[1,2]} 2-y\ \mathrm{d}y + 0 \\
&= \frac{1}{2} + 2 - 2 + \frac{1}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Lösung b):
Es gibt diverse Möglichkeiten dieses Integral abzuschätzen. Zunächst sollte man bemerken, dass die Funktion auf A positiv ist. Mit dem Satz von (Fubini)-Tonelli reicht es also zu zeigen das

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{x^2+y}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

endlich ist. Es gilt

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{x^2+y}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x^2+y)\Big|_0^1\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x^2+1) - \ln(x^2)\ \mathrm{d}x.$$

Nun ist der Logarithmus monoton und posiv auf $(1,2)$, darum gilt $\ln(x^2+1) \leq \ln(2)$. Ausserdem gilt

$$\int_0^1 \ln(x^2)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \ln(x)\ \mathrm{d} = 2(x\ln(x) - x)\Big|_0^1 = 2\ln(1) - 2$$

weil nach dem Satz von l'Hospital gilt: $\lim_{x\searrow 0} x\ln(x) = 0$.
Also ist das obrige Integral endlich.

Aufgabe 3: Transformationssatz (10 Punkte)

Sei

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$$

und $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\int_Y f(x_1 + x_2) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \, d\lambda_2(x_1, x_2) = \left[\int_0^1 y^{\alpha_1}(1-y)^{\alpha_2} d\lambda(y)\right] \left[\int_0^1 f(u) u^{\alpha_1+\alpha_2+1} d\lambda(u)\right]$$

für alle $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

Lösung:

Wir betrachten die Funktion $\Phi : (0,1)^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $(u, y) \mapsto (yu, (1-y)u)$. Wir sehen, dass $\Phi[(0,1)^2] = Y^\circ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 1\}$ das Innere von Y ist, und dass Φ eine Bijektion ist, mit $\Phi^{-1}(x_1, x_2) = \left(x_1 + x_2, \frac{x_1}{x_1 + x_2}\right)$. Ausserdem ist $\det D\Phi(u, y) = -u$. Da $Y \setminus Y^\circ$ eine λ_2-Nullmenge ist, ist

$$\begin{aligned}
&\int_Y f(x_1 + x_2) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \, \mathrm{d}\lambda_2(x_1, x_2) \\
=& \int_{Y^\circ} f(x_1 + x_2) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \, \mathrm{d}\lambda_2(x_1, x_2) \\
=& \int_{(0,1)^2} f(yu + (1-y)u)(yu)^{\alpha_1}((1-y)u)^{\alpha_2} u \, \mathrm{d}\lambda_2(u, y) \\
=& \int_{(0,1)^2} f(u) u^{\alpha_1+\alpha_2+1} y^{\alpha_1}(1-y)^{\alpha_2} \, \mathrm{d}\lambda_2(u, y).
\end{aligned}$$

Da f integrierbar ist und $|u|, |y|, |1-y| < 1$ sind, existiert das Integral

$$\int_{(0,1)^2} |f(u)| u^{\alpha_1+\alpha_2+1} y^{\alpha_1}(1-y)^{\alpha_2} \, \mathrm{d}\lambda_2(u, y)$$

und wir können den Satz von Fubini anwenden:

$$\int \ldots = \left[\int_0^1 f(u) u^{\alpha_1+\alpha_2+1} \, \mathrm{d}\lambda(u)\right] \left[\int_0^1 y^{\alpha_1}(1-y)^{\alpha_2} \, \mathrm{d}\lambda(y)\right].$$

Aufgabe 4: L^p-Normen (10 Punkte)

Sei $1 < p < 4$ und $f \in L^p((1;\infty))$ (bezüglich Lebesgue Mass λ auf dem Intervall $(1;\infty)$). Sei $g : (1;\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_x^{10x} \frac{f(t)}{t^{1/4}} \, d\lambda(t) \, .$$

Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, die von p aber nicht von f abhängt, mit

$$\|g\|_2 \leq C\|f\|_p$$

Insbesondere ist $g \in L^2((1;\infty))$.

Lösung:
Bemerke zunächst das die Hölderungleichung für festes $x \in \mathbb{R}^+$ liefert (wir betrachten hier den Fall $p' \neq 4$; für $p' = 4$, d.h. für $p = 4/3$ muss man ein bisschen anders argumentieren)

$$\begin{aligned}
\int_x^{10x} t^{-1/4}|f(t)| \,\mathrm{d}\lambda(t) &\leq ||f||_p \left(\int_x^{10x} t^{-p'/4}\right)^{1/p'} \\
&= ||f||_p \left(\frac{4}{4-p'} t^{\frac{-p'}{4}+1}\Big|_x^{10x}\right)^{1/p'} \\
&= ||f||_p \left(\frac{4}{4-p'}(10^{\frac{-p'}{4}+1}-1)x^{\frac{-p'}{4}+1}\right)^{1/p'} \\
&= \left(\frac{4}{4-p'}(10^{\frac{-p'}{4}+1}-1)\right)^{1/p'} ||f||_p x^{\frac{-1}{4}+\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

Also gilt unter Einsetzung obriger Ungleichung

$$\begin{aligned}
||g||_2^2 &\leq \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\int_x^{10x} t^{-1/4}|f(t)| \,\mathrm{d}\lambda(t)\lambda(t)\right)^2 \mathrm{d}\lambda(x) \\
&\leq \left(\frac{4}{4-p'}(10^{\frac{-p'}{4}+1}-1)\right)^{2/p'} ||f||_p^2 \int_1^\infty x^{-2}x^{\frac{-1}{2}+\frac{2}{p'}}.
\end{aligned}$$

Das Integral

$$\int_1^\infty x^{-2}x^{\frac{-1}{2}+\frac{2}{p'}}$$

hängt nur von p' und also nur von p ab. Es ist endlich, genau dann wenn der Exponent $-\frac{5}{2}+\frac{2}{p'} < -1$. Das gilt genau dann wenn $p' > \frac{4}{3}$. Weil $p' = \frac{p}{p-1}$ gilt dies genau dann wenn $p < 4$.
Die Konstante C setzt sich dann aus dem endlichen Integral und dem Vorfaktor $\left(\frac{4}{4-p'}(10^{\frac{-p'}{4}+1}-1)\right)^{2/p'}$ zusammen. Beide sind unabhängig von f.

Aufgabe 5: Fourier-Transformation (4+6 Punkte)

a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ rotationssymmetrisch, d.h. $f(Rx) = f(x)$ für alle $R \in SO(3)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}f$ auch rotationssymmetrisch ist.

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{|x|} \chi_{B_1(0)}(x)$$

wobei $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ und $B_1(0)$ der Ball mit Radius 1.

Hinweis: Benutzen Sie sphärische Koordinaten und Teil a).

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(R\xi) =&(2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \exp(-ix \cdot R\xi) \, \mathrm{d}\lambda_3(x) \\
=&(2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} f(R^T x) \exp(-iR^T x \cdot \xi) \, \mathrm{d}\lambda_3(x) \\
=&(2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \exp(-iy \cdot \xi) \, \mathrm{d}\lambda_3(x) \\
=&\mathcal{F}f(\xi),
\end{aligned}$$

wobei wir die Transformation $y = R^T x$ benutzt haben. Bemerke, dass $\det R^T = 1$ ist.

b) Wir benutzen Kugelkoordinaten, i.e. die Abbildung $\Phi : (0,1) \times (-\pi/2, \pi/2), (0, 2\pi) \to B_1(0)$ definiert durch $(r, \varphi, \theta) \mapsto (r \cos\varphi \cos\theta, r \cos\varphi \sin\theta, r \sin\varphi)$. Dann ist $\det D\Phi = r^2 \cos\varphi$.

Dann ist für $\xi = te_3$, $t \in \mathbb{R}$ die Fouriertransformation (mit Fubini)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(te_3) =&(2\pi)^{-3/2} \int_{B_1(0)} |x|^{-1} \exp(-itx_3) \, \mathrm{d}\lambda_3(x) \\
=&(2\pi)^{-3/2} \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos\varphi r^{-1} \exp(-itr \sin\varphi) \, \mathrm{d}\lambda(\theta) \, \mathrm{d}\lambda(\phi) \, \mathrm{d}\lambda(r).
\end{aligned}$$

Das Argument hängt nicht von θ ab, und wir können substituieren $u(\varphi) = r \sin\varphi$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(te_3) =&(2\pi)^{-1/2}\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos\varphi\exp(-itr\sin\varphi)\ \mathrm{d}\lambda(\phi)\ \mathrm{d}\lambda(r)\\
=&(2\pi)^{-1/2}\int_0^1\int_{-r}^{r}\exp(-itu)\ \mathrm{d}\lambda(u)\ \mathrm{d}\lambda(r)\\
=&(2\pi)^{-1/2}\int_0^1\int_{-r}^{r}\cos(tu)\ \mathrm{d}\lambda(u)\ \mathrm{d}\lambda(r)\\
=&(2\pi)^{-1/2}\int_0^1 2\frac{\sin(tr)}{t}\ \mathrm{d}\lambda(r)\\
=&\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos t}{t^2}.
\end{aligned}$$

Schliesslich benutzen wir, dass f rotationssymetrisch ist. Dann ist

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}f(|\xi|e_3) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos|\xi|}{|\xi|^2}.$$

Aufgabe 6: Satz von Gauss (4+2+4 Punkte)

a) Sei $B = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^3$ die Einheitskugel. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$F(x) = \begin{pmatrix} (x_2^4 + 2x_2^2x_3^2)x_1 \\ (x_3^4 + 2x_1^2x_3^2)x_2 \\ (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2)x_3 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial B} F\cdot\nu\ \mathrm{d}S_2.$$

b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $h \in C^1(U)$, $F \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\operatorname{div}(hF) = h\operatorname{div}F + \nabla h\cdot F$$

auf U gilt.

c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Polyeder. Sei $f \in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$, $g \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega f\Delta g\ \mathrm{d}\lambda_n = -\int_\Omega \nabla f\cdot\nabla g\ \mathrm{d}\lambda_n + \int_{\partial_r\Omega} f(\nabla g\cdot\nu)\ \mathrm{d}S_{n-1}$$

ist, wobei

$$\Delta g := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}.$$

Lösung zu a):
Bemerke zunächst das aus der Vorlesung bekannt ist, das der Ball glatt berandet ist. Wir können also den Satz von Gauß anwendenden und erfahren

$$\int_{\partial B} F \cdot \nu \, \mathrm{d}S^2 = \int_B \operatorname{div}(F) \, \mathrm{d}\lambda_3.$$

Wir berechnen die Divergenz von F und vereinfachen unter Nutzung der binomischen Formel:
$\operatorname{div}(F)(x_1, x_2, x_3) = x_2^4 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_3^4 + 2x_1^2 + x_3^2 + x_1^4 + 2x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = |x|^4$.
Dann ist unter Nutzung von sphärischen (Kugel-)Koordinaten:

$$\begin{aligned}\int_B \operatorname{div}(F) \, \mathrm{d}\lambda_3 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin(\theta) r^4 \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^1 r^6 \, \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin(\theta) \, \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \frac{1}{7} 2 \\ &= \frac{4}{7}\pi\end{aligned}$$

Lösung zu b):
Es gilt auf ganz U wegen den Definitionen und der Produktregel:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(hF) &= \sum_{i=1,\ldots,n} \frac{\partial}{\partial_{x_i}} (hF_i) \\ &= \sum_{i=1,\ldots,n} \left(\frac{\partial}{\partial_{x_i}} h \right) F_i + \sum_{i=1,\ldots,n} h \frac{\partial}{\partial_{x_i}} F_i \\ &= \nabla h \cdot F + h \operatorname{div} F\end{aligned}$$

Lösung zu c):
Bemerke das f und g so regulär sind, das $f \frac{\partial}{\partial_{x_i}} g \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ und damit der Satz von Gauß auf das Vektorfeld $f \nabla g$ angewendet werden kann. Es gilt also unter Verwendung von b)

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \Delta g \, \mathrm{d}\lambda_n &= \int_\Omega \operatorname{div}(f \nabla g) - \nabla f \cdot \nabla g \, \mathrm{d}\lambda_n \\ &= \int_\Omega \operatorname{div}(f \nabla g) \, \mathrm{d}\lambda_n - \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, \mathrm{d}\lambda_n \\ &= \int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \nu \, \mathrm{d}S_{n-1} - \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, \mathrm{d}\lambda_n\end{aligned}$$