Aufgabe 1: (4+4+4+4 Punkte)

Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist. Falsche Antworten geben einen Minuspunkt, unbeantwortete Fragen geben keinen Abzug. Minuspunkte werden nur innerhalb dieser Aufgabe verrechnet.

a. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$.

	wahr	falsch
Dann gilt: $z_n \to z \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$	☒	☐
Dann gilt: $\lvert z_n\rvert \to \lvert z\rvert \quad \Rightarrow \quad z_n \to z$	☐	☒
Dann gilt: $z_n \to z \quad \Rightarrow \quad \lvert z_n\rvert \to \lvert z\rvert$	☒	☐
Dann gilt: $z_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \to z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$	☒	☐

b. Sei K ein Körper. Seien $a, b, c \in K$.

	wahr	falsch
Dann gilt: $(a+b)\,c = ac + bc$	☒	☐
Dann gilt: $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$ für $a \neq 0$	☒	☐
Dann gilt: $a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$	☒	☐
Dann gilt: $a + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$	☐	☒

c. Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $A \neq \emptyset$. Sei $-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$.

	wahr	falsch
Dann gilt: A ist unbeschränkt $\quad \Leftrightarrow \quad \sup A = \infty$	☐	☒
Dann gilt: A ist endlich $\quad \Rightarrow \quad \max A = \sup A$	☒	☐
Dann gilt: Falls $\min A$ existiert, so ist $\min A = -\max(-A)$.	☒	☐
Dann gilt: $\sup A \notin A$	☐	☒

d. Sei $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$.

	wahr	falsch
Dann gilt: $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \exists x \in [-a, a] : f(x) = \sup_{y\in[-a,a]} f(y)$	☒	☐
Dann gilt: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und $\lvert f(0)\rvert = \lvert z\rvert = \lvert f(1)\rvert \Rightarrow \exists x \in [0,1] : f(x) = z$	☐	☒
Dann gilt: Es gibt ein surjektives $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$.	☐	☒
Dann gilt: Ist $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gibt ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 ein lokales Extremum.	☐	☒

A2 | Beweis durch Induktion:

① Punkte 3

①

Induktionsanfang $n=1$: $\frac{4^{2\cdot 1}-3^1}{13}$

$= \frac{16-3}{13} = 1 \in \mathbb{N}$.

Induktionsannahme: Es gelte ...

Induktionsschritt von n auf $n+1$:

Man bemerke, dass

②

(*) $$16^{n+1} - 3^{n+1} = 16\cdot(16^n - 3^n) + 3^n \cdot 13.$$

Dann

$$\frac{16^{n+1}-3^{n+1}}{13} = \underbrace{16 \cdot \underbrace{\frac{16^n - 3^n}{13}}_{\in \mathbb{N} \text{ nach Induktionsannahme}} + 3^n}_{\in \mathbb{N}}.$$ ①

Heuristik, um auf (*) zu kommen:

Man versuche zu schreiben

$$16^{n+1} - 3^{n+1} = a(16^n - 3^n) + b\cdot 13.$$

„guter" Faktor nach Ind.annahme

trivialerweise „gut"

$a = 16$ reproduziert offenbar 16^{n+1} leicht.

Da $13 = 16-3$

$$16^{n+1} - 3^{n+1} = 16(16^n - 3^n) + b(16-3).$$

$$= 16^{n+1} - 16\cdot 3^n + 16\cdot b - 3\cdot b.$$

Versuche $-16\cdot 3^n$ durch Wahl $b = 3^n$ zu eliminieren; damit wird $-3b = -3^{n+1}$, wir erhalten (*).

A3 | Nach Def. der Ableitung: (2)

$$f'(-x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(-x+t) - f(-x)}{t}$$

da f gerade ist (1)

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x-t) - f(x)}{t}$$

Linearität des lim erlaubt Vorzeichen rauszuziehen (2)

$$= - \lim_{t \to 0} \frac{f(x+(-t)) - f(x)}{(-t)}$$

Subst. „$s=-t$" (1)

$$= - \lim_{s \to 0} \frac{f(x+s) - f(x)}{s}$$

Def der Ableitung (1)

$$= - f'(x)$$

■

Oder mit Kettenregel:

Sei $g(x) := f(-x)$. (3)

Dann ist $g'(x) = -f'(-x) \quad \forall x$. (*)

Da f gerade: $f(x) = g(x) \ \forall x$.

Somit $g'(x) = f'(x) \ \forall x$. (**) (2)

Aus (*) und (**):

$$f'(-x) = -f'(x) \quad \forall x. \quad (2)$$

■

A4 | a) Es ist (Trick aus Übungen)

$$\sqrt{n^2+n} - n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}\right)\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}}$$ (1/2)

binom. Formel

$$= \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}}$$ ($\frac{1}{2}$)

kürzen

$$= \frac{\cancel{n} \cdot 1}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2},$$ ($\frac{1}{2}$)

also $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n^2+n} - n = \frac{1}{2}$, ($\frac{1}{2}$)

somit insbesondere $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt{n^2+n} - n = \frac{1}{2}$. ■

b) Es ist $$\left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2} = \underbrace{\sqrt{\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{n-3}}}_{\to e^{-5/2}} \underbrace{\sqrt{\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{3}}}_{\to 1} \times \sqrt{\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}}}$$

Behauptung: $\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty)$.

Beweis:

$$\log\left(\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}}\right) = \left[\log\left(\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{n-3}\right)\right] \cdot \frac{\sqrt{n}}{n-3}$$

$$\longrightarrow \log\left(e^{-5}\right) \cdot 0 = 0,$$ da log stetig.

Also $\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}} = \exp\left(\log\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}}\right)$

$\longrightarrow \exp(0) = 1$, da exp stetig.

Somit $\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2} \longrightarrow e^{-5/2}$. ■

A4 | c) Der Faktor $\frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)}$

konvergiert für $n \to \infty$:

$$\frac{-5n^3 + \sqrt{n}}{n^3 + n^3 + an^2 + bn + c} \qquad (a,b,c \in \mathbb{R})$$

$$= \frac{-5 + \frac{\sqrt{n}}{n^3}}{2 + a \cdot \frac{1}{n} + b \cdot \frac{1}{n^2} + c\,\frac{1}{n^3}}$$

$$\longrightarrow \frac{-5}{2}.$$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

Der Faktor $(-1)^n$ oszilliert zwischen $+1$ und -1. $\left(\frac{1}{2}\right)$

optional: Teilfolgen mit geraden Gliedern (bis auf endl. viele) liefern Häufungspunkt $-5/2$.
Teilfolgen mit ungeraden Gliedern (bis auf endl. viele) den HP $+5/2$.

Alle anderen TF (Teilfolgen mit ∞-vielen geraden wie ungeraden Gliedern) können nicht konvergieren. $\left(\frac{1}{2}\right)$

Kleinster H.P. = lim inf.

Also $\liminf_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)} = -\frac{5}{2}$. $\left(\frac{1}{2}\right)$

$\blacksquare$

A4 d) Möglichkeit 1: Potenzreihe 9

Es ist $\dfrac{\sin(ax)}{x} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dfrac{a^{2j+1} x^{2j}}{(2j+1)!}$.

Auch diese Potenzreihe hat Konvergenzradius ∞, ist also bez. x stetig.

Kann also einfach $x \to 0$ in der Reihe:

Nur der $j=0$ - Summand verschwindet nicht:

$$\frac{\sin(ax)}{x} \xrightarrow[(x \to 0)]{} a.$$

$\blacksquare$

Möglichkeit 2: siehe nächste Seite.

A4 d) Möglichkeit 2: l'Hopital:

Zähler und Nenner sind differenzierbar (1/2)

und $\lim_{x\to 0} \sin(ax) = 0$

und $\lim_{x\to 0} x = 0$,

also kann l'Hopital angewendet werden: (1/2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cdot\cos(ax)}{1}$$ (1/2)

$$\xrightarrow[\substack{\text{cos stetig}\\ \text{mit}\\ \cos(0)=1}]{\text{da}} \quad = a.$$ (1/2)

e) Es ist $0 \le \frac{e^x x^5}{x^x} = \frac{e^5 e^{x-5} x^5}{x^{x-5} x^5}$ (1/2)

$$= e^5 \left(\frac{e}{x}\right)^{x-5}$$

und für x groß genug: $\frac{e}{x} \le \frac{1}{2}$,

somit: $0 \le \frac{e^x x^5}{x^x} \le e^5 \frac{1}{2^{x-5}}$ (1/2)

für x groß genug.

Nun $2^{x-5} \longrightarrow \infty$ für $x \to \infty$. (1/2)

Somit $0 \le \lim_{x\to\infty} \frac{e^x x^5}{x^x} \le \lim_{x\to\infty} \frac{e^5}{2^{x-5}} = 0$, (1/2)

also $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x x^5}{x^x} = 0$.

A5 | Sei $\varepsilon > 0$. ②

Dann ex. $\delta > 0$ sodass

$\forall x, y \in M_1 \quad d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Insbesondere ③

(*) $d_1(a_n, a_m) < \delta \Rightarrow d_2(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon$.

Nach Voraussetzung ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CF. bezüglich d_1. Also ex. $N \in \mathbb{N}$ ③

(**) sodass $n, m > N \Rightarrow d_1(a_n, a_m) < \delta$.

Nach (*) und (**) also:

$\exists N \in \mathbb{N} \quad n, m > N \Rightarrow d_2(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon$. ②

■

A6 | a)

(i) Für $k \geq 1$ ist $\frac{2k}{3k^3+1} \leq \frac{2k}{3k^3} = \frac{2}{3}\frac{1}{k^2}$.

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ bekanntlich absolut konvergent ist, ist nach dem Majorantenkriterium also auch $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{3k^3+1}$ abs. konv. ∎

(ii) Wir beobachten, dass

$k =$	0	1	2	3	4	...
$\sin(\frac{k\pi}{2}) =$	0	+1	0	−1	0	...

und sin ist 2π-periodisch.

Indem wir die geraden Glieder weglassen erhalten wir also

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log k} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)\frac{\pi}{2})}{\log(2j+1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\log(2j+1)}$$ $\frac{1}{2}$)

Da $\frac{1}{\log(2j+1)}$ monoton fallend und positiv ist, ist die Reihe nach Leibnitz konvergent. $\frac{1}{2}$

Die Reihe ist aber nicht absolut konvergent, denn: $\frac{1}{2}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^j}{\log(2j+1)}\right| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\log(2j+1)} > \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j+1}.$$

optional [Nach Cauchy's Verdichtungssatz ist $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j+1}$ konvergent gdw $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2 \cdot 2^k+1}$ konvergent ist. $\frac{1}{2}$

Offenbar gilt $\frac{2^k}{2\cdot 2^k+1} \xrightarrow[(k\to\infty)]{} \frac{1}{2}$, somit ist die Reihe sicher divergent. ∎

(iii) z.B. Verwende die Stirling-Formel (Blatt 6, A 2): ①

s.u. einfacher

$$k! \leq e\,k\left(\frac{k}{e}\right)^k.$$

Somit

$$\frac{2^k k!}{k^k} \leq \frac{2^k\, e\,k\cdot k^k}{e^k\, k^k} \leq e\left(\frac{2}{e}\cdot(k^{1/k})\right)^k.$$

Bekanntlich $k^{1/k} \longrightarrow 1 \quad (k \to \infty)$. (*)

Da $e > 2$ ist, ex. ein $\varepsilon > 0$ mit

$\frac{e}{2} - \frac{\varepsilon}{2} > 1$, und (*) gilt für

fast alle k: $\quad k^{1/k} < \frac{e-\varepsilon}{2}$. $\frac{1}{2}$

Somit für fast alle k:

$$\frac{2^k k!}{k^k} \leq e\left(\frac{2}{e}\cdot\frac{e-\varepsilon}{2}\right)^k,$$

da $x \longmapsto x^k$ monoton wachsend ist.

Wir erhalten also

$$\frac{2^k k!}{k^k} \leq e\left(\underbrace{\frac{e-\varepsilon}{e}}_{<1}\right)^k,$$

wir haben also eine konv. geometrische Reihe als Majorante gefunden, $\frac{1}{2}$

somit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$ absolut konvergent. ∎

(Bemerkung: siehe auch Blatt 6, A 3.)

Einfacherer Alternativweg:

Quotientenkriterium prüfen. ② ∎

A6 b) Der Konvergenzradius ist per Def.

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}}.$$

(i) $\limsup_{k\to\infty} \left|\left(5-\frac{2}{k}\right)^k\right|^{1/k}$

$= \limsup_{k\to\infty} \left(5-\frac{2}{k}\right) = 5.$

da für k groß genug ist $5-\frac{2}{k}>0$ (1)

Somit $\varrho = 1/5$. (1)

(ii) $\limsup_{k\to\infty} \left| i^{k-1} k^k \right|^{1/k}$ (1)

$= \limsup_{k\to\infty} (k^k)^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} k = \infty$,

konventionsgemäß also $\varrho = 0$. (1)

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2z)^k}{k!}$: Potenzreihe von e^{2z}; überall abs. konv.

Konvergenzradius $\varrho = \infty$. (1)

(Kann auch wie im VL-Skript in Kapitel 4.2 berechnet werden.)

A7

15

a) Für $x \neq 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Hängt nur von f in bel. kleiner Umgebung von x ab (Def. des Limes). (1)

Können f also auf Intervall $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ einschränken, mit $0 \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Dort ex. die Ableitung offenbar nach Produkt- und Kettenregel und ist (1)

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)(-x^{-2})$$ (1)

$$= 2x \sin(1/x) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für $x = 0$: (1) (für Diff.-quotient)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{h}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{\text{beschränkt durch } \pm 1}$$

$$= 0.$$

Also ex. $f'(0)$ und hat den Wert $f'(0) = 0$. (2) für Erklärung

b) f' ist bei $x = 0$ stetig g.d.w.

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0).$$ (1)

Wie oben $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0 \quad (x \to 0)$, aber $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ oszilliert immer schneller zwischen ± 1. (1)

Man kann also eine Folge finden

deren Glieder gegen Null konvergieren

$$x_n \longrightarrow 0$$

und $f'(x_n) > \frac{1}{2}$ für unendlich viele n,

und eine Folge $y_n \longrightarrow 0$ (1)

mit $f'(y_n) < -\frac{1}{2}$ für ∞-viele n.

Somit existiert $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ nicht,

also ist $f'(x)$ bei $x = 0$ unstetig. (1)

optional, Verweis auf Nichtexistenz von $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ genügt ohne Beweis.

A 8) jeweils 1 Punkt für korrektes Anwenden von Produkt-, Kettenregel etc., 1 Punkt für korrektes, angemessenes anschließendes Vereinfachen, z. B.:

a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

b) $f'(x) = \sqrt{\dfrac{a-bx}{a+bx}} \cdot \dfrac{ab}{(a-bx)^2}$.

c) $\longrightarrow$ siehe unten.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, x^{\sqrt{x}} \left(1 + \dfrac{\log x}{2}\right)$.

e) Mit $\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = 1 + (\tan x)^2 = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$

findet man:

$$f'(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\tan x} + \tan x\right)$$

oder

$$f'(x) = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{\sin x \cdot \cos x}.$$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{3}\, x^{-2/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2}$

$\quad - \dfrac{2}{3}\, x^{1/3}(1-x)^{-1/3}(1+x)^{1/2}$

$\quad + \dfrac{1}{4}\, x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{-1/2}$

optional $\Big[= \left[\dfrac{1}{3}x^{-1} - \dfrac{2}{3}\,\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{1+x}\right] \times$

$\quad \times\, x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2}$.

A9 | a) Metrik-Axiome prüfen:

1. Axiom: • $d(x,y) \geq 0$, da alle Summanden nicht-negativ. (1)

• $x = y \Leftrightarrow x_i = y_i \ \forall i = 1, \dots n$

$\Leftrightarrow d_i(x_i, y_i) = 0 \ \forall i = 1, \dots n$ (da alle d_i Metriken sind)

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) = 0$, (1)

da alle Summanden nicht-negativ sind.

2. Axiom: $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} d_i(y_i, x_i) = d(y,x)$. (1)

3. Axiom (Dreiecksungleichung):

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(d_i(x_i, z_i) + d(z_i, y_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, z_i) + \sum_{i=1}^{n} d_i(z_i, y_i) \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$ (1)

Somit ist d Metrik auf $X_1 \times \dots \times X_n$.

b) In metrischen Räumen ist Kompaktheit äquivalent zu Folgenkompaktheit, wir arbeiten im Folgenden immer mit Folgenkompaktheit.

→

1) $X_1, \dots X_n$ folgekompakt $\Rightarrow$ $X_1 \times \dots \times X_n$ folgekompakt.

Beweis: Sei $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $X_1 \times \dots \times X_n$.

Nach Voraussetzung besitzt $x_1^{(n)}$ eine in X_1 konv. T.F. $x_1^{(n_k)}$,

$d_1(x_1^{(n_k)}, x_1) \longrightarrow 0 \ (k \to \infty)$. $\frac{1}{2}$

Nun ist $(x^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ immer noch Folge in $X_1 \times \dots \times X_n$ und es ex. wiederum T.F.

$d_2(x_2^{(n_{k_l})}, x_2) \longrightarrow 0$.

Dabei unverändert 1

$d_1(x_1^{(n_{k_l})}, x_1) \longrightarrow 0$.

Wiederhole diese Konstruktion n-fach (optional rigoroser: Induktion in n) um Teilfolge zu finden $\frac{1}{2}$

$(x^{(n_{k_{\dots t}})})_{t \in \mathbb{N}}$,

einfacher notiert $(x^{(n_t)})_{t \in \mathbb{N}}$,

mit
$$x_1^{(n_t)} \longrightarrow x_1$$
$$x_2^{(n_t)} \longrightarrow x_2$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(n_t)} \longrightarrow x_n.$$

Dann gilt offenbar $d(x^{(n_t)}, x) \to 0$ für $x = (x_1, \dots x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$, 1
wir haben also konv. TF von $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gefunden.

(zu A 3 b))

2) $X_1 \times \dots \times X_n$ folgekompakt

$\Rightarrow X_1, \dots X_n$ folgekompakt:

Beweis. Sei $(x_1^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ Folge in X_1.

Erweitere zu Folge (mit $\Theta_2, \dots \Theta_n$ bel. Elemente von $X_2, \dots X_n$)

$(x_1^{(m)}, \Theta_2, \Theta_3, \dots) \in X_1 \times \dots \times X_n$.

Nach Voraussetzung hat diese konv. T.F. (1)

(*) $(x_1^{(m_k)}, \Theta_2, \Theta_3, \dots) \longrightarrow (x_1, x_2, \dots x_n)$.

Betrachtung der Def. von $d(x,y)$ zeigt, dass in (*) gelten muss

$x_2 = \Theta_2, \dots, x_n = \Theta_n$.

Somit

$$d((x_1^{(m_k)}, \Theta_2, \dots), (x_1, \Theta_2, \dots)) \longrightarrow 0$$

$$\|$$

$$d_1(x_1^{(m_k)}, x_1) + \underbrace{d_2(\Theta_2, \Theta_2) + \dots}_{= 0},$$

Somit $x_1^{(m_k)} \longrightarrow x_1$, (1)

also ist X_1 folgekompakt.

Analog folgt, dass $X_2, \dots X_n$ folgekompakt.

Ergänzung (optional): falls leere Menge vorliegt: (1)

$\Theta_2, \dots \Theta_n$ existieren, denn andernfalls wäre eine der Mengen $X_2, \dots X_n$ die leere Menge; dann wäre auch $X_1 \times \dots \times X_n = \emptyset$, und $\emptyset$ ist trivialerweise folgekompakt. ∎

A10

Die Fkt. $f - f_n : K \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) - f_n(x)$

ist für jedes n stetig.

Da K kompakt wird das Supremum angenommen: (2)

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in K : f(x_n) - f_n(x_n) = \sup_{x \in K} \left[f(x) - f_n(x) \right].$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Folge in der kompakten Menge K, besitzt also konvergente Teilfolge

$$x_{n_j} \longrightarrow x_0 \in K. \quad (2)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$.

Wir benutzen ein $\varepsilon/3$-Argument: (2)

für $m < n_j$ wg. Monotonie

$$\sup_{x \in K} \left[f(x) - f_{n_j}(x) \right] = f(x_{n_j}) - f_{n_j}(x_{n_j}) \leq f(x_{n_j}) - f_m(x_{n_j})$$

(*) $$= \left(f(x_{n_j}) - f(x_0) \right) + \left(f(x_0) - f_m(x_0) \right) + \left(f_m(x_0) - f_m(x_{n_j}) \right) \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ mit } n_j > m.$$

Da $f(x_0) - f_m(x_0) \longrightarrow 0 \ (m \to \infty)$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$f(x_0) - f_m(x_0) < \varepsilon/3. \quad (1)$$

Da f und f_m stetig sind, existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $j \geq j_0$:

$$|f(x_{n_j}) - f(x_0)| < \varepsilon/3 \quad (1)$$

und

$$|f_m(x_0) - f_m(x_{n_j})| < \varepsilon/3. \quad (1)$$

Somit nach (*):

$$|f(x_{n_j}) - f_{n_j}(x_{n_j})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\parallel$$

$$\sup_{x \in K} [f(x) - f_{n_j}(x)].$$

Somit ist $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ glm. konvergent.

Verwende nun Monotonie um zu zeigen, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ glm. konvergent:

Wegen Monotonie:

$\forall x \in K$: $\quad 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{n_j}(x)$ für $n > n_j$ $\quad$ (1)

Also für $n > n_{j_0}$:

$$0 \leq \sup_{x \in K} [f(x) - f_n(x)] \leq \sup_{x \in K} [f(x) - f_{n_j}(x)] < \varepsilon.$$

Damit ist glm. Konvergenz gezeigt. ∎