Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 1

V1G1 – Analysis 1

Abgabe am 16. Oktober 2012 in der Vorlesung.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1: Logik

a. Es sei A die Aussage „Falls die Sonne scheint, gehen wir baden“. Welche der Aussagen A_1 bis A_3 folgen aus A?

A_1: „Falls wir baden gehen, scheint die Sonne.“

A_2: „Falls die Sonne nicht scheint, gehen wir nicht baden.“

A_3: „Falls wir nicht baden gehen, scheint nicht die Sonne.“

b. Es sei B die Aussage

„Es gibt eine Partei, in der jeder Politiker alle Gesetze des Steuerrechts kennt“.

Formulieren Sie diese Aussage mit Quantoren. Geben Sie sowohl in Quantorenschreibweise als auch in Umgangssprache die Negation $\neg B$ an.

Aufgabe 2: Funktionen und Mengen

Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Funktion. Zeigen Sie:

a. Für alle Mengen $A, B \subset N$ gilt:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

b. Für alle Mengen $A, B \subset M$ gilt:

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

c. Es ist f genau dann injektiv, wenn für alle Mengen $A, B \subset M$ gilt:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Aufgabe 3: Surjektivität und Injektivität

Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Weiter existiere eine Abbildung $g : N \to M$, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_N$. Zeigen Sie:

a. f ist surjektiv.

b. Falls f injektiv ist, so gilt $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

Aufgabe 4: Relationen

Zeigen Sie:

a. $\Leftrightarrow$ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Aussagen.

b. Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass durch

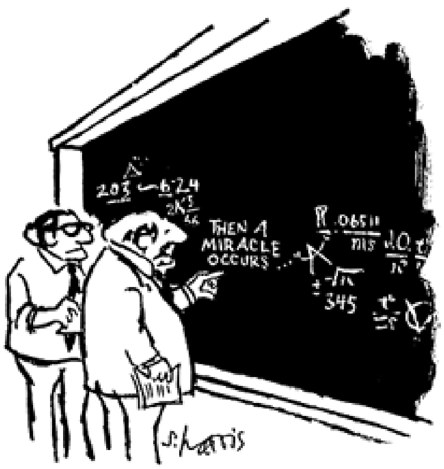
$$x_1 \sim x_2 \quad \text{genau dann, wenn} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird. Zeigen Sie weiter, dass

$$\tilde{f} : M_{/\sim} \to N, \quad [x] \mapsto f(x)$$

eine wohldefinierte Funktion ist (d. h. zeigen Sie, dass die Werte von $\tilde{f}$ nur von der Äquivalenzklasse $[x]$ abhaengen, nicht von der Wahl des Repräsentanten).

Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ injektiv ist.



"I think you should be more explicit here in step two."