Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 10

V1G1 – Analysis 1

Abgabe am 18. Dezember 2012 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Gleichmässig konvergente Funktionenfolgen (jeweils 2 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionenfolgen/Funktionenreihe gleichmässig konvergieren.

a. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2},\ x \in \mathbb{R}$

b. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2},\ x \in \mathbb{R}$

c. $f_n(x) = 1 + x^n(1-x)^n,\ x \in [0;1]$

d. $f_n(x) = 1 + x^n(1-x^n),\ x \in [0;1]$

e. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^2}{k^3+x^3},\ x \in [0,c],\ \text{wobei } c > 0.$

Aufgabe 2: Exponentialfunktion (4+6 Punkte)

a. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

Hinweis: mit der Stetigkeit von $x \to e^x$ und $x \to \log x$, das Problem kann auf den Beweis von

$$\lim_{z\to 0} \frac{\exp(z)-1}{z} = 1$$

reduziert werden.

b. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (wobei $x \in \mathbb{R}$):

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n-4}\right)^n$ (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ (iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n.$

Aufgabe 3: Potenzreihen und Konvergenzradius (jeweils 2 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien (bzgl. $z \in \mathbb{C}$) der folgenden Reihen:

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+a^k}{1+b^k} z^k$, wobei $a, b > 0$

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \left(1+\frac{3}{k}\right)^{k^2} z^k$

c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} d(k) z^k$ wobei $d(k) =$ Anzahl Teiler von k

d. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^k$

e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(k^2)}}{k!}$, d. h. $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, mit $a_j := \begin{cases} 1/k! & \text{falls } j = k^2 \\ 0 & \text{falls } j \text{ keine Quadratzahl ist} \end{cases}$

Hinweis: Eine ganze Zahl a heisst *Teiler* einer ganzen Zahl b genau dann, wenn es eine ganze Zahl n gibt, für die $an = b$ ist.

Aufgabe 4: Stetigkeit und diskrete Metrik (3+4+3 Punkte)

Sei A eine nichtleere Menge und d die diskrete Metrik auf A. Sei $(M, \tilde{d})$ ein beliebiger metrischer Raum.

a. Zeigen Sie, dass jede Funktion $f : (A, d) \to (M, \tilde{d})$ stetig ist.

b. Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$ offen bezüglich der Standardmetrik, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $U_1 = \emptyset$ und $U_2 = \mathbb{R}$, oder $U_1 = \mathbb{R}$ und $U_2 = \emptyset$.

c. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (A, d)$ genau dann stetig ist, falls sie konstant ist.