Übungsblatt 10

V1G2 – Analysis 2

Abgabe am Donnerstag, 27. Juni 2013, in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Die spezielle lineare Gruppe als Mannigfaltigkeit (5+5 Punkte)

Wir betrachten die spezielle lineare Gruppe $SL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det A = 1\}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$. Zeigen Sie:

a. $SL(n)$ ist eine (n^2-1)-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n^2}$.

b. Der Tangentialraum zu $SL(n)$ an der Identität $1 \in SL(n)$ ist

$$T_1 SL(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \mathrm{tr}\ A = 0\}.$$

Hier bezeichnet tr A die Spur der Matrix A.

Aufgabe 2: Alternative Definition von Mannigfaltigkeiten (6+4 Punkte)

a. Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$. Zeigen Sie, dass eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension k ist, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a, eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^k$ und eine reguläre Abbildung $\phi \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ gibt, so dass $\phi(G) = M \cap U$ und $\phi : G \to M \cap U$ ein Homöomorphismus ist.

b. Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\psi : \Omega \to \Omega'$ ein Diffeomorphismus und $M \subset \Omega$ eine C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension k. Zeigen Sie, dass $\psi(M)$ eine C^1-Mannigfaltikeit der Dimension k ist.

Aufgabe 3: Extrema mit Nebenbedingung (5+5 Punkte)

a. Bestimmen Sie Maximum und Minimum von $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ auf

(i) $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;

(ii) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b. Finden Sie alle bedingten lokalen Extrema von $f(x, y, z) = x^3 + y + z^3$ auf der Einheitssphäre $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Aufgabe 4: Bedingte Extrema der Distanzfunktion (5 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension $(n-1)$ (d.h. eine Hyperfläche). Sei $a \in \mathbb{R}^n \backslash M$. Zeigen Sie: Ist die Distanzfunktion $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch $d(x) = ||x - a||$, im Punkt $x_0 \in M$ bedingt lokal extremal (unter der Nebenbedingung $x \in M$), so steht die Strecke von a nach x_0 senkrecht zur Tangentialebene zu M in x_0.

Aufgabe 5: Eigenwerten von symmetrischen Matrizen (5 Punkte)

Sei $A \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F(x) = \langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j$$

auf der Einheitsphäre $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ das Maximum annimmt. Beweisen Sie damit, dass A mindestens einen reellen Eigenwert mit reellem Eigenvektor besitzt (ein reeller Eigenvektor ist ein Eigenvektor mit reellen Komponenten).