Übungsblatt 11

V1G1 – Analysis 1

Abgabe am 15. Januar 2012 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Ableitung (6+4 Punkte)

a. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und vereinfachen Sie die erhaltenen Ausdrücke angemessen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x+1)(x-3)} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\},$$

$$g(x) = \log\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \text{mit } x > 1,$$

$$h(x) = \sqrt{\exp(\sin\sqrt{x})} \qquad \text{mit } x > 0.$$

b. Sei $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \infty)$ definiert durch

$$f(x) = e^x + \arctan x.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und $(f^{-1})'(\xi)$ existiert für alle $\xi > -\frac{\pi}{2}$. Berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.

Aufgabe 2: Satz von L'Hôpital (4+6 Punkte)

a. Beweisen Sie den Satz von L'Hôpital (Vorlesungsskript Satz 8.14) für den Fall $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} g(x) = +\infty$ und für den Fall $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} g(x) = -\infty$.

b. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\tan(3x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\log(\sin x)}.$$

Aufgabe 3: Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes (10 Punkte)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Intervall (a, b) differenzierbar. Weiter sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Zeigen Sie: Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es existiert ein $\zeta \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}.$$

Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Aufgabe 4: Ableitung (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f'(x) > f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ und sei $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Dann gilt $f(x) > 0$ für alle $x > x_0$.