Übungsblatt 11

V1G2 – Analysis 2

Abgabe am Donnerstag, 4. Juli 2013, in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Vektorfelder (10 Punkte)

Konstruieren Sie ein Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v(x,y) = (v_1(x,y), v_2(x,y))$ mit folgenden Eigenschaften:

- Alle Kreise in $\mathbb{R}^2$, welche die y-Achse im Ursprung berühren, sind Feldlinien;
- v ist stetig differenzierbar.

Aufgabe 2: Linienintegrale (3+3+4 Punkte)

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma K \cdot \mathrm{d}x$ für

a. $K(x,y) = (x^2 + y, 2xy)$ und γ der Einheitskreis, umlaufen im Gegenuhrzeigersinn;

b. $K(x,y) = (x + y, 2x - y)$ und γ der Bogen beschrieben durch $y = x^3$ von $(-2,-8)$ bis $(1,1)$;

c. $K(x,y,z) = (-y, x, z)$ und γ die Schnittkurve des Paraboloids

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2\}$$

mit der Ebene

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 2\},$$

im Gegenuhrzeigersinn um die z-Achse.

Aufgabe 3: Ellipsoid (10 Punkte)

Ein Ellipsoid mit Zentrum im Ursprung sei gegeben durch

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (3x - z)^2 + (6y - z)^2 + z^2 \le 36\}.$$

Dieses Ellipsoid wird nun senkrecht von oben beleuchtet (aus unendlichem Abstand) und wirft einen Schatten E' auf die darunterliegende horizontale Ebene $z = -8$. Bestimmen und zeichnen Sie E'.

Hinweis: Wie lässt sich die Schattengrenze auf der Oberfläche des Ellipsoids E charakterisieren?

Aufgabe 4: Kugelvolumen (5 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist, das Volumen einer Kugel von Radius $r > 0$ in $\mathbb{R}^3$ zu berechnen. Sei dazu $f : [-r, r] \times [-r, r] \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} & \text{für } x^2 + y^2 \leq r^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Machen Sie sich zuerst klar, dass $\int_{-r}^{r} \int_{-r}^{r} f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ das halbe Volumen der Kugel mit Radius r ist.

Zeigen Sie: Das Volumen der Kugel ist $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Aufgabe 5: Zum Satz von Fubini (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \text{ oder } y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Warums steht dies nicht im Widerspruch zum Satz von Fubini?