Übungsblatt 12

V1G1 – Analysis 1

Abgabe am 22. Januar 2012 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Funktionenräume (5+5 Punkte)

Seien $a < b$ reelle Zahlen. Für $f \in C^m([a,b])$ definieren wir

$$\|f\| := \sum_{j=0}^{m} \|f^{(j)}\|_{C([a,b])} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(j)}(x)|. \tag{1}$$

a. Zeigen Sie, dass (1) eine Norm auf $C^m([a,b])$ ist.

b. Zeigen Sie, dass $C^m([a,b])$, versehen mit der durch die Norm (1) induzierten Metrik, vollständig ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $C([a,b])$ vollständig ist.

Aufgabe 2: Konvexität (5+5 Punkte)

a. Seien $x_1, \ldots x_n$ und $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ positive reelle Zahlen. Weiter sei $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Zeigen Sie, dass

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

b. Seien $z, w \in \mathbb{C}^n$, seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie die Hölder Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k w_k| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^q \right)^{1/q}.$$

Hinweis: zeigen Sie mit **a.**, dass, für beliebige $a, b > 0$,

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q .$$

Zeigen Sie damit, dass

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k||w_k| \leq \frac{\alpha^p}{p} \sum_{k=1}^{n} |z_k|^p + \frac{1}{q\alpha^q} \sum_{k=1}^{n} |w_k|^q$$

für beliebige $\alpha > 0$. Optimieren Sie dann die Wahl von $\alpha > 0$.

Aufgabe 3: Taylorentwicklung (5+5 Punkte)

a. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes nichtleeres Intervall. Zeigen Sie, dass zu jedem $f \in C^2(I,\mathbb{R})$ eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$\left| f(a) + f(b) - 2 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq C(b-a)^2 \quad \forall a, b \in I.$$

b. Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|^2 \leq 4 \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \right) \cdot \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| \right).$$

Hinweis: Beginnen Sie mit einer Taylorentwicklung von $f(x+h)$ und optimieren Sie am Ende des Beweises die Wahl von h.

Aufgabe 4: Taylorreihe (4+3+3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion definiert durch $f(x) := \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für $x \in (-1,1)$.

a. Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um den Punkt $x_0 = 0$.

b. Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Taylorreihe.

c. Zeigen Sie, dass die Taylorreihe auf $|x| < \rho$ mit f übereinstimmt (d.h., die Folge der Taylorpolynome konvergiert, für jeden $|x| < \rho$, gegen $f(x)$).

MY HOBBY: EXTRAPOLATING