Übungsblatt 12

V1G2 – Analysis 2

Abgabe am Donnerstag, 11. Juli 2013, in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Peano-Kurve (5+5 Punkte)

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gerade, periodisch mit Periode 2 und auf dem Intervall $[0, 1]$ gegeben durch

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < 1/3 \\ 3t - 1 & \text{für } 1/3 \leq t < 2/3 \\ 1 & \text{für } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die Funktion $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$\phi(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g(4^{2k}t)}{2^k}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(4^{2k+1}t)}{2^{k+1}} \right).$$

a. Zeigen Sie, dass ϕ stetig ist.

b. Zeigen Sie, dass der Wertebereich $\phi([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$ ist.

Aufgabe 2: Doppelintegrale und Satz von Fubini (2+3 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale:

a. $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 y \sin(xy) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$,

b. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{4 - x^2y^2}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.

Aufgabe 3: Vertauschung von Integral und Ableitung (10 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Für alle $y \in \mathbb{R}$ existieren

$$f(y) := \int_0^1 g(x, y) \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad h(y) := \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \mathrm{d}x$$

Die Funktion f ist differenzierbar, aber $f'(0) \neq h(0)$.

Aufgabe 4: Linienintegrale (2+3 Punkte)

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ der Weg $\gamma(t) = (t^3, t^2+t, t)$. Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma K \cdot \mathrm{d}x$ für die folgenden Vektorfelder $K(x,y,z)$ auf $\mathbb{R}^3$:

a. $K(x,y,z) = (2xy^3, 3x^2y^2 + 2yz, y^2)$,

b. $K(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x+z)$.

Tipp: Versuchen Sie zunächst, ein Potential zu finden.

Aufgabe 5: Deformation von Wegen (10 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld mit $\partial_i K_j = \partial_j K_i$, $i,j = 1, \ldots, n$. Seien $\gamma, \widetilde{\gamma} \in C^1([0;1];\Omega)$ stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma(0) = \widetilde{\gamma}(0)$ und $\gamma(1) = \widetilde{\gamma}(1)$.

Es existiere ferner eine Funktion $\phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ mit $\phi(0,t) = \gamma(t)$, $\phi(1,t) = \widetilde{\gamma}(t)$ für alle $t \in [0;1]$ und $\phi(s,0) = \gamma(0)$, $\phi(s,1) = \gamma(1)$ für alle $s \in [0;1]$.

Sei $\phi \in C^2([0;1] \times [0;1])$ (d.h. $\phi \in C^2((0;1) \times (0;1))$ so, dass $\phi, D\phi, D^2\phi$ auf $[0;1] \times [0;1]$ stetig fortsetzbar sind). Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma K \cdot \mathrm{d}x = \int_{\tilde{\gamma}} K \cdot \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_{\phi(s,\cdot)} K \cdot \mathrm{d}x$.