Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 13

V1G1 – Analysis 1

Dieses Blatt wird nicht mehr korrigiert.
DER STOFF IST DENOCH KLAUSURRELEVANT!

Aufgabe 1: Analytische Funktionen

a. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Polynom p_n, sodass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-\frac{1}{x}} = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

b. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und f auf einer Umgebung von x_0 beliebig oft differenzierbar. Sei weiter f' analytisch an der Stelle x_0. Zeigen Sie, dass f analytisch ist an der Stelle x_0.

Tipp: Finden Sie zunächst eine konvergente Potenzreihe, deren Ableitung auf einer Umgebung von x_0 mit f' übereinstimmt.

Aufgabe 2: Riemann-Summen

a. Seien $a < b$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

indem Sie das Integral explizit als Grenzwert geeigneter Riemann-Summen berechnen.

b. Sei $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ integrierbar für alle $T > 0$ und sei $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$. Zeigen Sie:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \lambda.$$

Aufgabe 3: Integrierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \mathrm{int}(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

wobei $\mathrm{int}(y)$ der ganzzahlige Teil von $y \in \mathbb{R}$ ist (die grösste ganze Zahl kleinergleich y).

a. Zeigen Sie, dass f integrierbar ist auf dem Intervall $[0,1]$.

b. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\log(n) - \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

Aufgabe 4 basiert auf dem Stoff der Donnerstagsvorlesung.

Aufgabe 4: Integrale

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale, i. e. finden Sie die Stammfunktionen.

a. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}\mathrm{d}x$

b. $\int \frac{1}{x\log(x)\log(\log(x))}\mathrm{d}x$

c. $\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x$

d. $\int x\sin(x)\mathrm{d}x$

e. $\int x^n e^x\mathrm{d}x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

f. $\int e^x \sin(x)\mathrm{d}x$