Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 13

V1G2 – Analysis 2

Keine Abgabe!
Besprechung am Donnerstag, 18. Juli 2013, in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Holomorphe Funktionen

a. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nur reelle Werte annimmt. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

b. Bestimmen Sie, für welche $a, b \in \mathbb{C}$ es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = x^2 + 2axy + by^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2: Komplexe Integration

Sei $n \in \mathbb{Z}$ und γ der Kreis von Radius r um $z_0 \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie das Linienintegral

$$\int_\gamma (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z.$$

Aufgabe 3: Reelle Integrale

a. Berechnen Sie für $p \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{1+x^2} \, dx$$

durch Verwendung vom Cauchy Integralsatz. Betrachten Sie dazu, für $R > 0$ die Kurve γ_R die aus dem Segment $[-R; R]$ und aus einem Halbkreis zwischen den Punkten R und $-R$ besteht.

b. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty \sin x^2 \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Zeigen Sie dazu $\int_\gamma e^{-z^2} \mathrm{d}z = 0$, wobei der Weg γ in der komplexen Ebene von 0 nach R, dann auf dem Kreisbogen bis $Re^{i\pi/4}$ und von dort zurück zur 0 verläuft. Verwenden Sie außerdem die Formel

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aufgabe 4: Verallgemeinerter Satz von Liouville

a. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und konvex und $z_0 \in U$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorph. Zeigen Sie: Dann ist f auf ganz U holomorph.

Hinweis: Sie können ohne Beweis den *Satz von Morera* verwenden: Ist $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$ für die Randkurve $\partial\Delta$ (einmal im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen) jedes Dreiecks Δ in U, dann ist f holomorph.

b. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und es gebe ein $M > 0$ und $R_0 > 0$, sodass $|f(z)| \leq M|z|^n$ für alle $|z| \geq R_0$. Zeigen Sie: Dann ist f ein Polynom höchstens n-ten Grades.

Hinweis: Verwenden Sie **a.** und Induktion.