Übungsblatt 1

V1G2 – Analysis 2

Abgabe am Donnerstag, 18. April 2013, in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Gamma-Funktion (5+5 Punkte)

Für $x > 0$ definieren wir die *Eulersche Gamma-Funktion* durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

a. Für welche Werte von x ist das Integral an der oberen Schranke uneigentlich, wann an der unteren? Zeigen Sie, dass das Integral für alle $x > 0$ konvergiert.

b. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Aufgabe 2: Taylorformel mit Integralrestglied (10 Punkte)

Sei I ein Intervall und $a \in I$. Sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Dann gilt für $x \in I$ die *Taylorformel mit Integralrestglied*:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3: Fourierreihen (5+5 Punkte)

a. Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion definiert durch $f(x) := e^{ax}$ für $x \in [0, 2\pi)$. Berechnen Sie die Fourierreihe von f, und benutzen Sie das Resultat um die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2 + a^2}$$

zu berechnen. Berechnen Sie weiterhin die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n^2+a^2)^2}$.

b. Es sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion definiert durch $f(x) := x - \pi$ für $x \in [0, 2\pi)$. Berechnen Sie die Fourierreihe von f, und benutzen Sie das Resultat zur Berechnung von

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

Aufgabe 4: Regularität und Fourierkoeffizienten (5+5 Punkte)

a. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Lipschitz-stetige Funktion.

Zeigen Sie: Dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Erinnerung: Es heisst f Lipschitz-stetig, falls eine Konstante L existiert, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

b. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische C^k-Funktion.

Zeigen Sie: Dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass

$$|\hat{g}(n)| \leq \frac{C}{|n|^k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$