Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 2

V1G1 – Analysis 1

Abgabe am 23. Oktober 2012 in der Vorlesung.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Bitte beachten Sie das Angebot des Help-Desks in Raum N.1002:
Mittwoch 16-20 Uhr, Donnerstag 18-20 Uhr.

Aufgabe 1: Binomialkoeffizienten (2+4+2+2 Punkte)

Für natürliche Zahlen n und k mit $k \leq n$ definiert man die Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

a. Beweisen Sie, dass $\binom{n}{k}$ eine natürliche Zahl ist. Zeigen Sie dazu, dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\; \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

und wenden Sie dann Induktion in n an.

b. Beweisen Sie: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

c. Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

d. Berechnen Sie $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots \pm \binom{n}{n}$.

Aufgabe 2: Körperaxiome (2+2+2+2+2 Punkte)

Sei K ein Körper und $a, b \in K$. Beweisen Sie aus den Körperaxiomen die folgenden Rechenregeln:

a. Das multiplikativ neutrale Element ist eindeutig, d. h. sind $1 \in K$ und $1' \in K$ multiplikativ neutral, so folgt $1 = 1'$.

b. Sei $a \neq 0$. Dann ist das multiplikativ Inverse zu a eindeutig.

c. $-(-a) = a$

d. $(-1) \cdot a = -a$

e. $0 \cdot a = 0$

Aufgabe 3: Geordnete Körper (2+2+2+2+2 Punkte)

Sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper und seien $a, b, c \in K$. Zeigen Sie:

a. $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$

b. $a < b \Leftrightarrow 0 < b - a$

c. $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$

d. $a \neq 0 \Rightarrow a^2 := a \cdot a > 0$ (insbesondere $1 > 0$)

e. $a > 0 \Rightarrow 1/a > 0$.

Aufgabe 4: Ungleichungen und Absolutbetrag (3+3+2+2 Punkte)

Sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper mit Absolutbetrag $|\cdot|$. Zeigen Sie für $a, b, c \in K$ die folgenden Aussagen:

a. Sei $c \geq 0$. Dann gilt: $|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$.

b. Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$

c. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

d. $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$.