Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 2

V1G2 – Analysis 2

Abgabe am Donnerstag, 25. April 2013, in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Stirling-Formel (5+5 Punkte)

Die Stirling-Formel gibt eine wichtige Näherung für die Fakultät: Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existiert ein $\theta_n \in [0,1]$, sodass

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right).$$

Ziel dieser Aufgabe ist ein Beweis einer vereinfachten Version dieser Formel.

a. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$\log(n!) - \frac{1}{2}\log n + \sum_{k=1}^{n-1} r_k = n \log n - n + 1,$$

wobei $r_k = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - t\right)\frac{1}{k+t}\,\mathrm{d}t$.

Tipp: Das Integral $\int_1^n \log t\,\mathrm{d}t$ kann sowohl direkt berechnet werden als auch zuerst in Integrale $\int_k^{k+1} \log t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \log(k+t)\,\mathrm{d}t$ zerlegt werden.

b. Zeigen Sie, dass $r_k > 0$ gilt und folgern Sie, dass $n! < n^{n+1/2}e^{-n+1}$.

Aufgabe 2: Konvergenz der Fourierreihe (4+3+4+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π-periodische Funktion. Seien $\mathcal{F}_0 f,\ \mathcal{F}_1, \ldots$ die Fourierpolynome von f und sei

$$\sigma_n f := \frac{1}{n+1}\left(\mathcal{F}_0 f + \mathcal{F}_1 f + \cdots + \mathcal{F}_n f\right).$$

a. Zeigen Sie, dass

$$(\sigma_n f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t)\mathrm{d}t,$$

wobei

$$F_n(t) := \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} D_\nu(t) \quad \text{mit} \quad D_\nu(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\nu}^{\nu} e^{ijt} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left((\nu+1/2)t\right)}{\sin(t/2)}$$

b. Zeigen Sie, dass für $t \notin \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\sin\left((n+1)t/2\right)}{\sin(t/2)} \right)^2 .$$

Zeigen Sie weiterhin, dass $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \mathrm{d}t = 1$.

c. Sei $\delta > 0$ fest. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $F_n(t)$ auf $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ gleichmässig gegen 0 konvergiert.

d. Zeigen Sie nun, dass $\sigma_n f \to f$ gleichmässig auf $\mathbb{R}$, für $n \to \infty$. Folgern Sie: Konvergiert die Folge $(\mathcal{F}_n f)(x)$, so gilt $\lim_{n\to\infty}(\mathcal{F}_n f)(x) = f(x)$.

Aufgabe 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen (6+6+3 Punkte)

a. Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

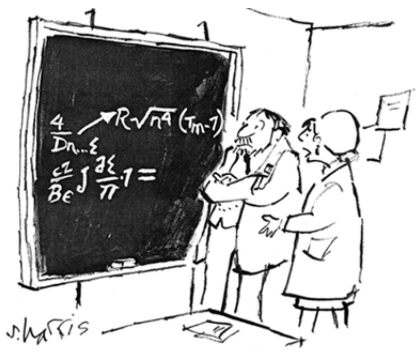
- $xy' + 3y = 0, \quad (x > 0)$,
- $y' = \frac{1}{x^2 y}(y^2 - 1)^{3/2}, \quad (x, y > 0)$.

b. Finden Sie die Lösung der Anfangswertprobleme

- $y' + e^x y = 0, \quad y(0) = 1$,
- $y' + x^2(y+1)(y-2)^2 = 0, \quad y(4) = 2$.

c. Bestimmen Sie alle Lösungen (es gibt mehr als eine!) des Anfangswertproblems

$$y' = |y|^{2/3}, \quad y(0) = 1.$$



"EVEN IF IT DOESN'T EQUAL ANYTHING, IT'S STILL VERY IMPRESSIVE."