Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 3

V1G1 – Analysis 1

Abgabe am 30. Oktober 2012 in der Vorlesung.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1: Supremum und Infimum (10 Punkte)

Sei $A \subset \mathbb{R}$ derart, dass $\alpha := \inf A > 0$. Es sei $A^{-1} := \{1/a : a \in A\}$.
Zeigen Sie:

$$\sup \left(A^{-1}\right) = 1/\alpha.$$

Aufgabe 2: Wurzeln in $\mathbb{R}$ (3+4+3 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und sei $p \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Sei $B := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x,\ x^p \leq a\}$.
Zeigen Sie:

a. B ist nach oben beschränkt.

b. Für $c := \sup B$ gilt $c^p = a$.

c. Die Gleichung $z^p = a$ hat in $(0, \infty)$ die eindeutige Lösung c.

Aufgabe 3: Mächtigkeit (4+3+3 Punkte)

Zeigen Sie:

a. Zwei Intervalle $[a, b]$, $[c, d] \subset \mathbb{R}$ sind stets gleichmächtig.
Ist das Intervall $(0, 1)$ gleichmächtig wie $\mathbb{R}$?

b. Die Menge

$$M := \{S \subset \mathbb{N} : S \text{ endlich oder } \mathbb{N} \setminus S \text{ endlich}\}$$

ist abzählbar.

c. Es gibt keine *ordnungserhaltende* Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$, d. h. keine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \quad n < m \Rightarrow \varphi(n) < \varphi(m).$$

Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Aufgabe 4: Komplexe Zahlen (6+4 Punkte)

a. Zeigen Sie, dass für die komplexen Zahlen Assoziativ- (sowohl für Addition als auch für Multiplikation) und Distributivgesetz gelten.

b. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$\frac{1}{z}, \ \frac{z-a}{z+a}, \ \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3, \ \frac{2-3i}{2+i} + \frac{1-i}{1+3i}.$$