Übungsblatt 3

V1G2 – Analysis 2

Abgabe am Donnerstag, 2. Mai 2013, in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Fixpunktproblem (5 Punkte)

Sei $b \in \mathbb{R}^n$ und $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Zur Lösung der Gleichung

$$Bx = b \tag{1}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ soll das äquivalente Fixpunktproblem

$$T(x) = x$$

mit $T(x) = b + Ax$ und $A = 1 - B$ betrachtet werden. Nehmen Sie an, dass

$$\|A\|_{\text{op}} := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < 1\,.$$

Zeigen Sie, dass (1) eine eindeutige Lösung $a \in \mathbb{R}^n$ hat und, dass, für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^n$, die Folge x_k in $\mathbb{R}^n$, die rekursiv durch $x_{k+1} = Tx_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert wird, gegen a konvergiert. Zeigen Sie ferner, dass (mit der Konvention $A^0 = 1$)

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} A^k b\,.$$

Aufgabe 2: Iterative Konstruktion von Lösungen (5+5 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y'(x) = xy(x) + x^3$, $y(0) = 0$. Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die globale Lösung des Anfangswertproblems.

a. Bestimmen Sie $t_0 > 0$ so, dass die Funktionenfolge y_n, die rekursiv durch $y_0(x) \equiv 0$ und

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x \left(ty_n(t) + t^3\right)\, dt$$

definiert ist, gleichmässig auf $[-t_0; t_0]$ gegen y konvergiert.

b. Zeigen Sie: Die Lösung y ist durch eine auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe gegeben. Bestimmen Sie die Grenzfunktion dieser Potenzreihe explizit.

Aufgabe 3: Funktionalgleichung (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

erfüllen. Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $f(0)$. Gibt es mehrere Möglichkeiten? Leiten Sie dann eine Differentialgleichung für f her. Wählen Sie erst y und dann x fest.

Aufgabe 4: Laplace-Transformation (3+4+4+4 Punkte)

Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion so, dass $C, \sigma \geq 0$ mit $|f(t)| \leq Ce^{\sigma t}$ existieren. Man definiert dazu die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\{f\}$ durch

$$\mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

für alle $s \in \mathbb{C}$, für die das Integral konvergiert.

a. Zeigen Sie die Konvergenz des Integrals für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \sigma$.

b. Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der Funktionen t^n, e^{at}, $t \cdot e^{at}$, $\cos(at)$ ($a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$).

c. Zeigen Sie: Ist f stetig differenzierbar, so gilt für s wie in **(a)**

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0).$$

d. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + 6y' + 5y = \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Nach **(b), (c)** lautet die Laplace-Transformierte der Lösung y

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s^2 + 6s + 5) \cdot (s^2 + 1)} =: R(s).$$

Ermitteln Sie anhand der Partialbruchzerlegung von R eine stetige Funktion y mit $\mathcal{L}\{y\} = R$ und verifizieren Sie, dass sie das Anfangswertproblem löst.