Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 4

V1G1 – Analysis 1

Abgabe am 6. November 2012 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen (10 Punkte)

Sei $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| < 1$. Zeigen Sie: Eine komplexe Zahl z besitzt genau dann die Eigenschaft $|z| \leq 1$, wenn $|z - c| \leq |1 - \bar{c}z|$.

Aufgabe 2: Abzählbarkeit (10 Punkte)

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ heisst *algebraisch* falls sie Lösung einer Gleichung

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \quad \text{mit } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ und } a_n \neq 0$$

ist. Zeigen Sie: Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar.

Aufgabe 3: Konvergenz von Folgen I (5+5 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ganzer Zahlen mit $a_n \to a$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n = a$ für alle $n > n_0$.

b. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei beschränkt und es konvergiere $b_n \to 0$. Dann gilt $a_n b_n \to 0$.

Aufgabe 4: Konvergenz von Folgen II (6+4 Punkte)

a. Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bis $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

$$a_n := \frac{n^3 - 7}{n^4 + 3}, \qquad b_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$
$$c_n := \frac{1}{n+8}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) - \frac{n}{2}, \qquad d_n := (-1)^n \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n+1} - \sqrt{n^2 + 4n}\right).$$

b. Die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$e_0 := 0, \quad e_{n+1} := \sqrt{1 + e_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und bestimmen Sie den Grenzwert (Hinweis: zeigen Sie, dass e_n monoton und beschränkt ist).