Übungsblatt 4

V1G2 – Analysis 2

Abgabe am Freitag, 10. Mai 2013, in Raum 3.025, zwischen 9.30 und 12.30.

Aufgabe 1: Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen (5+5 Punkte)

Wir betrachten das homogene System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a. Finden Sie durch Exponenzieren von A die allgemeine Lösung von (1).

b. Finden Sie die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit Anfangsbedingung } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Aufgabe 2: Gewöhnliche Differentialgleichungen (5+5 Punkte)

a. Finden Sie eine Basis des Lösungsraums der Differentialgleichung

$$y''' + y'' - y' - y = 0$$

die aus reellen Funktionen besteht.

b. Bestimmen Sie die Lösung des Anfagswertproblem:

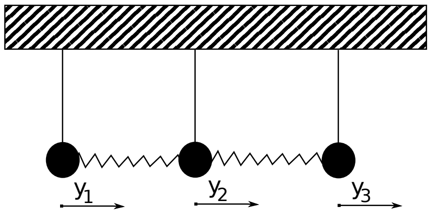
$$\begin{cases} y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1\ , y''(0) = 0, \ y'''(0) = 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 3: Gekoppelte Pendel (5+3+2 Punkte)

Ein System von drei gekoppelten Pendeln wird näherungsweise beschrieben durch das System von Differentialgleichungen

$$\begin{cases} y_1'' &= -gy_1 + k(y_2 - y_1) \\ y_2'' &= -gy_2 + k(y_3 - y_2) + k(y_1 - y_2) \\ y_3'' &= -gy_3 + k(y_2 - y_3) \end{cases} \tag{3}$$

für zwei Konstanten $k, g > 0$. Dabei ist y_j die horizontale Auslenkung des j-ten Pendels (positive y_j nach rechts), vgl. Skizze.



a. Finden Sie drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = v_j e^{\lambda_j t} \qquad \text{für } j = 1, 2, 3 \tag{4}$$

das System (3) lösen. Die Lösungen (4), bei denen die drei Pendel mit der selben Frequenz oszillieren, heissen Eigenmoden der Schwingung.

b. Skizzieren Sie die drei Eigenmoden.

c. Finden Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Gronwall Lemma (5+5 Punkten)

Sei $I = [x_0; x_1]$, $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ und $y \in C(I)$ mit

$$y(x) \leq a + b \int_{x_0}^{x} y(t)dt$$

für alle $x \in I$. In der Vorlesung wurde dann gezeigt, dass

$$y(x) \leq a \exp(b(x - x_0)) \tag{5}$$

für alle $x \in I$.

a. Zeigen Sie, indem Sie ein Gegenbeispiel finden, dass die Aussage (5) i. A. nicht gilt, falls $b < 0$.

b. Zeigen Sie die folgende differentielle Form des Lemma von Gronwall. Sei $\varphi \in C^1(I)$, $\alpha, \beta \in C(I)$ mit

$$\varphi'(x) \leq \alpha(x) + \beta(x)\varphi(x)$$

für alle $x \in I$. Dann gilt

$$\varphi(x) \leq \varphi(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} \beta(t)dt} + \int_{x_0}^{x} \alpha(t) e^{\int_t^x \beta(\tau)d\tau} dt$$

für alle $x \in I$. Bemerkung: hier wird nichts über das Vorzeichen von β angenommen.