 Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 5

V1G1 – Analysis 1

Abgabe am 13. November 2012 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Konvergenz von Folgen (5+5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen für Folgen in $\mathbb{C}$:

a. Wenn die Folge a_n konvergiert, dann konvergiert die Folge $b_n := a_{n+1} - a_n$ gegen Null.

b. Wenn die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ gegen Null konvergiert, dann ist die Folge a_n konvergent.

Aufgabe 2: Konvergenz der Wurzel (10 Punkte)

Zeigen Sie: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und so, dass $a_n \to a$. Sei $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann gilt $a_n^{1/q} \to a^{1/q}$.

Aufgabe 3: Limes und Limes Superior (5+5 Punkte)

a. Sei $a_n := (-1)^n + (-1)^{[n/2]}$. Bestimmen Sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$.
Bemerkung: $[n/2]$ bezeichnet die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich $n/2$.

b. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass a_n genau dann gegen a konvergiert, wenn

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a.$$

Aufgabe 4: Limes Superior von Produkten (4+3+3 Punkte)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$, jeweils für fast alle n.

a. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \leq (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n).$$

b. Zeigen Sie: Wenn zusätzlich die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, so gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n).$$

c. Finden Sie ein Gegenbeispiel, welches zeigt, dass im Allgemeinen

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \neq (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n).$$

Aufgabe 5: Dezimalbrüche (4+6 BONUSPUNKTE)

Ein Dezimalbruch $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ heisst *periodisch*, falls ein $p \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_{n+p} = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a. Schreiben Sie $15, \overline{713} = 15, 713713713\ldots$ als Bruch $\frac{p}{q}$ natürlicher Zahlen p und q.

b. Zeigen Sie: Die Dezimalbruchentwicklung einer reellen Zahl r ist genau dann abbrechend oder periodisch, wenn r rational ist.