Übungsblatt 5

V1G2 – Analysis 2

Abgabe am Donnerstag, 16. Mai 2013, in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Differenzierbarkeit (6+4+5 Punkte)

a. Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

(i) $f(x, y) = (x + y)e^{xy}$,

(ii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & \text{für } xy \neq 0 \\ 1 & \text{für } xy = 0 \end{cases}$,

(iii) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

b. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(0, 0)$ alle Richtungsableitungen besitzt, aber dort nicht stetig ist.

c. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y) = |xy|$ definiert. Wo ist g differenzierbar?

Aufgabe 2: Partielle Ableitungen und Tangentialebene (5+5 Punkte)

a. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Zeigen Sie: Hat $f : \Omega \to \mathbb{R}$ auf Ω beschränkte partielle Ableitungen $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$, dann ist f auf Ω stetig.

b. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Geben Sie eine Gleichung für die zur Fläche $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ liegende Tangentialebene an.

Aufgabe 3: Äquivalenz von Normen auf $\mathbb{R}^n$ (3+4+4+4 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}$$

und die Maximum-Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |x_j| \,.$$

a. Zeigen Sie, dass

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{1/2} \|x\|_\infty \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \,.$$

Folgern Sie, dass die geschlossene Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R} : \|x\|_\infty \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich der Norm $\|.\|_\infty$ kompakt ist.

b. Sei $\|.\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ so existiert, dass $\|x\| \leq C\|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

c. Zeigen Sie, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, mit $\|x\| \geq c\|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. *Tipp*: argumentieren Sie durch Widerspruch, und benutzen Sie die Resultate von **a.** und **b.**

d. Seien $\|.\|_a, \|.\|_b$ zwei beliebige Normen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ existiert, mit

$$\frac{1}{C} \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\|x\|_a \,.$$