Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 6

V1G1 – Analysis 1

Abgabe am 20. November 2012 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Teilfolgen und Häufungspunkte (3+3+4 Punkte)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

a. Entscheiden Sie ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Sind die Teilfolgen (x_{2n}), (x_{2n+1}) und (x_{5n}) konvergent, dann ist auch (x_n) konvergent. Begründen Sie ihre Antwort.

b. Entscheiden Sie ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Sind die Teilfolgen $(x_{pk})_{k\in\mathbb{N}}$ für alle Primzahlen p konvergent, dann ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Begründen Sie ihre Antwort (Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass unendlich viele Primzahlen existieren).

c. Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$, d. h. $n \mapsto r_n$ ist eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Jede reelle Zahl ist ein Häufungspunkt der Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2: Eulersche Zahl, Stirling-Formel (3+3+2+2 Punkte)

Zeigen Sie:

a. Die Folge $e_n := (1+\frac{1}{n})^n$ ist monoton wachsend und die Folge $a_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ ist monoton fallend.

b. Es gilt $\lim_{n\to\infty} e_n = e$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.

c. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} &= \frac{n^n}{n!},\\
\left(1+\frac{1}{1}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\right)^3\left(1+\frac{1}{3}\right)^4\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} &= \frac{n^n}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

d. Es gelten die Ungleichungen

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\,n\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Bemerkung: Genauer kann die Fakultät für grosses n durch die Stirling-Formel $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ angenähert werden.

Aufgabe 3: Reihen (jeweils 2 Punkte)

Untersuchen Sie ob die folgenden Reihen konvergieren.

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{1/k} - 1\right)^k$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$

c. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k}\right)^{1/k}$

d. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$

e. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k!}$

Aufgabe 4: Arithmetisches Mittel (7+3 Punkte)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$ und sei

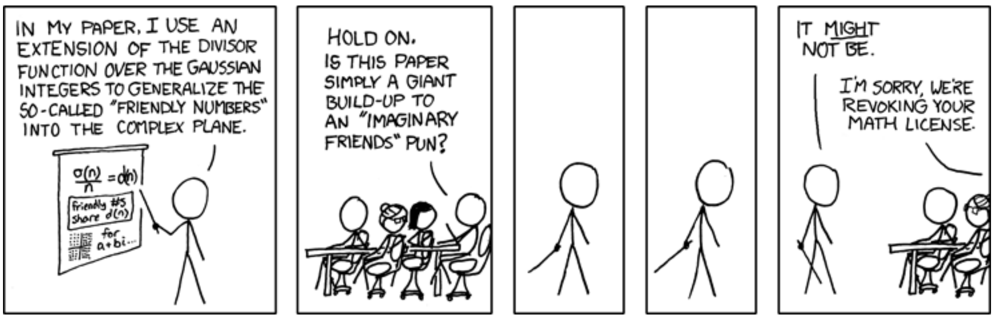
$$w_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

die Folge der arithmetischen Mittel.

a. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} w_n = x.$$

b. Gilt auch die Umkehrung? Begründen Sie ihre Antwort.



http://xkcd.com/