Übungsblatt 6

V1G2 – Analysis 2

Abgabe am Montag, 27. Mai 2013, in der Vorlesung!

Aufgabe 1: Kettenregel (5+5 Punkte)

a. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \int_{\cos x}^{\sin y} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie $Df(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f(x,y) := \phi(\frac{y}{x})$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } x \neq 0.$$

Aufgabe 2: Differenzierbarkeit und Stetigkeit (5+5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

a. Zeigen Sie, dass f überall differenzierbar ist.

b. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig sind.

Aufgabe 3: Attraktoren für vektorielle Gleichungen (3+3+3+3+3 Punkte)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ Lipschitz-stetig mit $f(0) = 0$ und so, dass für jeden Eigenwert λ der $n \times n$ Matrix $Df(0)$ gilt Re $\lambda < 0$. Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass 0 ein Attraktor ist für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

a. Sei $\mu > 0$ so, dass $\mathrm{Re}\,\lambda < -\mu$ für alle Eigenwerte λ von $Df(0)$. Für $x > 0$ definieren wir die $n \times n$ Matrix $\varphi(x) = \exp(xDf(0))$. Zeigen Sie, dass $C_0 > 0$ existiert mit

$$\|\varphi(x)\|_{\mathrm{op}} \le C_0\, e^{-\mu x} \quad \text{für alle } x > 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Jordan-Normalform der Matrix $Df(0)$. Für eine blockdiagonale Matrix J mit Blöcken $J_1, \dots, J_k$ gilt $\|J\|_{\mathrm{op}} = \max_{j=1,\dots,k} \|J_j\|_{\mathrm{op}}$.

b. Zeigen Sie, dass $f(y) = Df(0)y + R_y y$, wobei für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ wir die $n \times n$ Matrix

$$R_y = \int_0^1 dt\,(Df(ty) - Df(0))$$

definiert haben. Zeigen Sie ferner, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| \le \varepsilon$ die Schranke $\|R_y\|_{\mathrm{op}} \le \mu/(4C_0)$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\| \int_0^1 dt\, A(t)\|_{\mathrm{op}} \le \int_0^1 dt\, \|A(t)\|_{\mathrm{op}}$.

c. Sei $y(x)$ die eindeutige Lösung von (1). Zeigen Sie, dass

$$y(x) = \exp(xDf(0))y_0 + \int_0^x dt\, \exp((x-t)Df(0))R_{y(t)}y(t), \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\exp(-xDf(0))y(x) - y_0$ als Integral über die Ableitung.

d. Sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_0\| \le \min(\varepsilon, \varepsilon/(4C_0))$. Zeigen Sie, dass $\|y(x)\| \le \varepsilon$ für alle $x > 0$.

Hinweis: Nehmen Sie an, es existiere $x > 0$ mit $\|y(x)\| > \varepsilon$. Die Identität in **c.** und die Schranken in **a.** und **b.** führen zu einem Widerspruch.

e. Zeigen Sie, dass für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_0\| \le \min(\varepsilon, \varepsilon/(4C_0))$ gilt $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, d. h. 0 ist ein Attraktor.

Hinweis: Aus der Identität in **c.** und der Schranken in **a.** und **b.** leiten Sie eine Ungleichung für $e^{\mu x}\|y(x)\|$ her. Wenden Sie dann das Gronwall-Lemma an.

Aufgabe 4: Gedämpftes Pendel (5 Punkten)

Ein gedämpftes Pendel kann durch die Differentialgleichung

$$\varphi''(x) + 2\gamma\varphi'(x) + \sin\varphi(x) = 0 \tag{2}$$

beschrieben werden, mit $\gamma > 0$. Die Variable x ist hier die Zeit, $\sin\varphi(x)$ ist die auf das Pendel wirkende Kraft, und $2\gamma\varphi'(x)$ die Reibung.

Schreiben Sie (2) in eine Gleichung erster Ordnung für $y(x) = (\varphi(x), \varphi'(x))$ um. Zeigen Sie, dass $y = (0,0)$ ein Attraktor ist. Ausser $y(t) \equiv (0,0)$, gibt es andere konstante Lösungen? Welche dieser Lösungen sind Attraktoren?