Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 7

V1G1 – Analysis 1

Abgabe am 27. November 2012 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Umordnungssatz [Ergänzung zu Prp. 4.19] (6+4 Punkte)

a. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe reeller Zahlen, welche konvergent aber nicht absolut konvergent ist.
Zeigen Sie: Es gibt eine Umordnung der Reihe, welche gegen $+\infty$ divergiert.

b. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ eine Reihe komplexer Zahlen, welche konvergent aber nicht absolut konvergent ist.
Zeigen Sie: Es gibt eine Umordnung $\sum_{k=0}^{\infty} z_{\phi(k)}$, so dass $\left|\sum_{k=0}^{n} z_{\phi(k)}\right| \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 2: Vollständigkeit (3+4+3 Punkte)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei

$$d_*(x,y) := \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

a. $(\mathbb{R}, d_*)$ ist ein metrischer Raum.

b. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, $x^* \in \mathbb{R}$ und $d(x,y) = |x-y|$ die übliche Metrik auf $\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$x_n \to x^* \text{ in } (\mathbb{R}, d) \quad \Leftrightarrow \quad x_n \to x^* \text{ in } (\mathbb{R}, d_*).$$

c. $(\mathbb{R}, d_*)$ ist vollständig.

Aufgabe 3: Cauchy-Produkt (3+7 Punkte)

Sei $a_0 := 0$ und sei $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ für $n > 0$.

a. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

b. Beweisen Sie, dass das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst, d. i. die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \ldots + a_n a_0,$$

divergiert.

Aufgabe 4: Konvergente Reihe (10 Punkte)

Sei für $k \in \mathbb{N}$

$$\epsilon_k := \begin{cases} 1 & \text{falls die Dezimaldarstellung von } k \text{ keine Ziffer 9 enthält,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{k}$ konvergiert.

http://xkcd.com/

Scumbag topologist
'opens' a store.