Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 7

V1G2 – Analysis 2

Abgabe am Donnerstag, 6. Juni 2013, in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Laplace-Operator (5+5 Punkte)

a. Sei $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta f = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

b. Sei $f(x) = \frac{1}{\|x\|}$ für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta f = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 2: Partielle Differentialgleichungen (5+5 Punkte)

a. Bestimmen Sie die allgemeinste C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

b. Sei $f(x, t) := \varphi(x - ct)$, wobei $x, t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass f die Wellengleichung

$$\partial_t^2 f - c^2 \partial_x^2 f = 0$$

auf $\mathbb{R}^2$ löst.

Aufgabe 3: Gegenbeispiel zum Satz von Schwarz (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist, mit $\partial_x \partial_y f(0, 0) \neq \partial_y \partial_x f(0, 0)$.

Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Aufgabe 4: Taylorentwicklung (5+5 Punkte)

a. Sei $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$. Berechnen Sie das Taylorpolynom $p_2(h)$ (d. h. bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung) von f an der Stelle $(1,1)$.

b. Sei $f \in C^{m+1}(U)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|^{m+1}} \left(f(a+h) - \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{i:|i|=j} \frac{(\partial_i f)(a)}{i!} h^i \right) = 0.$$