Übungsblatt 8

V1G1 – Analysis 1

Abgabe am 4. Dezember 2012 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Abschluss, Inneres, Rand (3+4+3 Punkte)

Sei M ein metrischer Raum und $A \subset M$. Zeigen Sie:

a. $(A^c)^\circ = \left(\bar{A}\right)^c$.

b. Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \{x \in M : \text{ es existiert eine Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } A \text{ mit } x_n \to x\}, \\ A^\circ &= \{x \in A : \exists\, \varepsilon > 0 \text{ sodass } B_\varepsilon(x) \subset A\}. \end{aligned}$$

c. $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$.

Aufgabe 2: Abstand zweier Mengen (6+4 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum, $A, K \subset M$ mit $A \cap K = \emptyset$. Wir definieren den Abstand von K und A als

$$\operatorname{dist}(K, A) := \inf\{d(x, y) : x \in K, y \in A\}.$$

a. Seien K kompakt und A abgeschlossen. Zeigen Sie: $\operatorname{dist}(K, A) > 0$.
Hinweis: Nehmen Sie an $\operatorname{dist}(K, A) = 0$ und benutzen Sie die Charakterisierung von inf (das Analog von Proposition 2.13 im Skript) um geeignete Folgen zu konstruieren.

b. Seien K und A lediglich abgeschlossen. Bleibt die Aussage in **a.** richtig?

Aufgabe 3: Punktweises Maximum und Supremum (6+4 Punkte)

a. Seien f und g stetige reellwertige Funktionen auf einem metrischen Raum M. Zeigen Sie, dass $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ eine stetige Funktion auf M definiert.

b. Finden Sie eine Folge reellwertiger Funktionen f_n auf $[0,1]$ mit den Eigenschaften

- $0 \leq f_n(x) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in [0,1]$,
- jede Funktion f_n ist stetig,
- die Funktion $x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ ist nicht stetig.

Aufgabe 4: Stetige Funktionen (5+5 Punkte)

a. Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit der Eigenschaft, dass $f(x) = f(x^2)$ für alle $x \in (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $x \in (0,\infty)$ gilt $x^{1/k} \to 1$ $(k \to \infty)$.

b. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $f = g$, d. h. $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.