Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 8

V1G2 – Analysis 2

Abgabe am Donnerstag, 13. Juni 2013, in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Laplace-Operator (10 Punkte)

Sei φ eine C^2-Funktion auf $(0,\infty)$ und $f(x) = \varphi(|x|)$ für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = \varphi''(|x|) + \frac{n-1}{|x|}\varphi'(|x|)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Aufgabe 2: Lokale Extrema (6+4 Punkte)

a. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen im Ursprung $(0,0)$ ein lokales Extremum besitzen:

i) $f(x,y) = \cos(3x - 2y) - \cos(5x + y)$,

ii) $g(x,y) = x^4 - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 - 3x^2y^3 + y^4$.

b. Finden Sie die lokalen Extrema von $h(x,y) = 3x^2y + x^3e^y$.

Aufgabe 3: Eulersche Homogenitätsrelation (2+3+3+2 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$. f heißt positiv homogen vom Grad α, wenn:

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad \forall t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Sei f positiv homogen vom Grad α. Zeigen Sie:

a. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f sind auch positiv homogen von einem gewissen Grad α'. Bestimmen Sie α'.

b. Es gilt $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$. Hinweis: Differenzieren Sie $f(tx)$ nach t.

c. Es gilt $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = \alpha(\alpha - 1) f(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

d. Ist $\alpha = 1$, so sind die Spalten der Hesseschen Matrix $H_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ linear abhängig für alle $x \neq 0$.

Aufgabe 4: Umkehrbarkeit (5+5 Punkte)

a. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Zeigen Sie, dass f lokal invertierbar ist, aber global keine Umkehrfunktion besitzt.

b. Seien U, V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, f eine C^1-Funktion auf U, die U bijektiv auf V abbildet. Sei f^{-1} überall in V differenzierbar. Zeigen Sie, dass $Df(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist.