Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Übungsblatt 9

V1G1 – Analysis 1

Abgabe am 11. Dezember 2012 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Gleichmässige und Lipschitz-Stetigkeit (4+2+4 Punkte)

a. Zeigen Sie durch explizite Bestimmung von $\delta > 0$ zu gegebenem $\varepsilon > 0$, dass $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ gleichmässig stetig ist.

b. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst *Lipschitz-stetig*, falls eine Konstante L existiert, sodass für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Zeigen Sie: Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmässig stetig.

c. Zeigen Sie, dass $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 2: Ein Fixpunktsatz, ein Extremwertsatz (5+5 Punkte)

a. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig.
Zeigen Sie: Dann existiert ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$ (ein *Fixpunkt*).

b. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Zeigen Sie:

- Die Funktion f ist beschränkt.
- Die Funktion f nimmt ihr Infimum oder ihr Supremum (oder beide) an, d. h. es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}} f(y)$ oder ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} f(y)$.

Aufgabe 3: Beweis zu Beispiel in Vorlesung (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ und } p, q \text{ teilerfremd sind.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Funktion f ist unstetig in allen $a \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4: Grenzwerte von Funktionen (jeweils 1 Punkt)

Seien $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie die existenten:

a. $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b. $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

c. $\lim_{x \to 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1}$

d. $\lim_{x \to 0} x \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{1/2}$

e. $\lim_{x \uparrow 0} x \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{1/2}$

f. $\lim_{x \downarrow 0} x \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{1/2}$

g. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{(x+a)(x+b)} - x$

h. $\lim_{x \uparrow 2} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x-2| + |x^2 - 4|}$

i. $\lim_{x \downarrow 2} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x-2| + |x^2 - 4|}$

j. $\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 27}{x^4 - 81}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis ihr Schulwissen zur Sinus-Funktion benutzen.