Übungsblatt 9

V1G2 – Analysis 2

Abgabe am Donnerstag, 20. Juni 2013, in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Gleichung mit Parameter (4+3+3 Punkte)

Für $x, y > 0$ sei

$$f(x, y) := xy - \log x + \log y.$$

a. Zeigen Sie, dass zu jedem $x > 0$ genau ein $y =: \phi(x)$ existiert mit $f(x, y) = 0$.

Tipp: Zwischenwertsatz.

b. Zeigen Sie, dass $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist.

c. Bestimmen Sie $\sup_{x>0} \phi(x)$. Wird das Supremum angenommen? Wenn ja, wo?

Aufgabe 2: Nullstellen von Polynomen (10 Punkte)

Für $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei p_x das Polynom in t definiert durch

$$p_x(t) := x_0 + x_1 t + \ldots + x_n t^n.$$

Sei $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ und ξ_0 eine einfache Nullstelle von $t \mapsto p_a(t)$.

Zeigen Sie: Es existiert eine reellwertige stetig differenzierbare Funktion Φ, definiert auf einer Umgebung von a in $\mathbb{R}^{n+1}$, mit

- $\Phi(a) = \xi_0$,
- für jedes x im Definitionsbereich von Φ gilt: $\Phi(x)$ ist einfache Nullstelle von $p_x(t)$.

In Worten ausgedrückt: Die einfachen Nullstellen eine Polynoms hängen stetig differenzierbar von den Koeffizienten des Polynoms ab.

Aufgabe 3: Kontraktionsprinzip (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion. Es existiere eine Konstante $c \in (0, 1)$ sodass für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt $\|Df(x)\| \leq c$.

Zeigen Sie: Die Funktion $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $g(x) = x + f(x)$, ist surjektiv.

Aufgabe 4: Mannigfaltigkeiten (5 Punkte)

Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x,y,z) = x^2 + xy - y - z,$$
$$f_2(x,y,z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Zeigen Sie, dass

$$T = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x,y,z) = f_2(x,y,z) = 0\big\}$$

eine C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension 1 ist.

Aufgabe 5: Tangentialebene (5+5 Punkte)

Sei $a > 0$ und

$$S := \{(x_1,x_2,x_3) \subset \mathbb{R}^3 : x_1,x_2,x_3 > 0 \text{ und } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} = \sqrt{a}\}.$$

a. Zeigen Sie, dass S eine C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

b. Sei nun $x \in S$. Bestimmen Sie die Tangentialebene an S im Punkt x und bestimmen Sie die Schnittpunkte $t_k e_k$, $k = 1,2,3$, der Tangentialebene mit den Koordinatenachsen. (Hier bezeichnen e_k die kanonischen Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^3$.)

Zeigen Sie, dass $s = t_1 + t_2 + t_3$ unabhängig von x immer denselben Wert hat.