Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Klausur Analysis 2

30. Juli 2013

Bitte lassen Sie die Klausur geschlossen und den Stift liegen, bis die Bearbeitungszeit eröffnet wird! Lesen Sie solange die untenstehenden Hinweise durch.

Name, Vorname	Matrikelnummer

- Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden = 180 Minuten ab der Eröffnung. Geben Sie vorher ab, so verlassen Sie bitte anschließend das Gebäude.
- Versehen Sie alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer.
- Nach Ende der Bearbeitungszeit heften Sie bitte Ihre Blätter zusammen, legen den Stift weg und warten an ihrem Platz. Sie können ihren Platz verlassen, nachdem *alle* Klausuren eingesammelt sind. *Vorher keine Gespräche!*
- Einziges erlaubtes Hilfsmittel sind zwei Blatt DIN-A4 (jeweils Vorder- und Rückseite, d. h. vier Seiten) mit handgeschriebenen Notizen.
- Handys, Computer, Taschenrechner etc. sind ausgeschaltet in verschlossenen Taschen zu verstauen.
- Bei den Multiple-Choice-Aufgaben zählt nur das Endergebnis. Bei allen anderen Aufgaben muss ihr Vorgehen zumindest stichwortartig begründet sein. Resultate aus der Vorlesung oder den schriftlichen Übungen können ohne Beweis zitiert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe	Note
Punkte											
max.	10	10	15	10	12	10	10	13	10	100	

Aufgabe 1: (5+5 Punkte)

Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist. Falsche Antworten geben einen Minuspunkt, unbeantwortete Fragen geben keinen Abzug. Minuspunkte werden nur innerhalb dieser Aufgabe verrechnet.

a. Es gilt:

	wahr	falsch
• Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $m < n$ und $M := \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) = 0\} \neq \emptyset$. Sei ferner $\mathrm{Rg}(Df(x)) = m$ für alle $x \in M$. Dann ist die Menge M eine C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension $n - m$ in $\mathbb{R}^n$.	☐	☐
• Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $m < n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x_0) = 0$ und $\mathrm{Rg}(Df(x_0)) < m$. Dann ist $M := \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) = 0\}$ keine C^1-Mannigfaltigkeit.	☐	☐
• Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Mannigfaltigkeit, $\gamma \in C^1([-1,1];\mathbb{R}^n)$ eine Kurve mit $\gamma(0) = x \in M$. Dann ist $\gamma'(0)$ im Tangentialraum $T_x(M)$.	☐	☐
• Der unendliche Zylinder $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ ist eine zwei-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$.	☐	☐
• Der endliche Zylinder $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ 0 \leq z \leq 1\}$ ist eine zwei-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$.	☐	☐

b. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Es gilt:

	wahr	falsch
• Falls $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann ist $\lvert f \rvert$ holomorph.	☐	☐
• Falls $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann ist f analytisch.	☐	☐
• Falls $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann gilt $\int_\gamma f \, dx = 0$ für jede geschlossene stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to U$.	☐	☐
• Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $(z_n)_n \subset U$ eine Folge in U, so dass $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei ferner $z_i \neq z_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f = g$ auf U.	☐	☐
• Falls $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt ist, dann ist f konstant.	☐	☐

Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(x+2\pi) = f(x)$, und sei α/π irrational. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x+n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für $f(x) = e^{ikx}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3: (5+5+5 Punkte)

a. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(x) = x^2(2+y(x))$, $y(1) = 1$.

b. Bestimmen Sie eine Basis für den Lösungsraum der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

c. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (3+7 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, $\omega \in \mathbb{C}$ kein Eigenwert von A und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}^n$.

a. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = Ay(x) + e^{\omega x} p(x) \tag{1}$$

Was ist der Lösungsraum von (1)?

b. Zeigen Sie, dass (1) eine Lösung der Form $\varphi(x) = e^{\omega x} q(x)$ hat, wobei $q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}^n$ und grad (q) = grad (p).

Hinweis: Leiten Sie zunächst eine Gleichung für q her. Betrachten Sie dann den Ansatz $q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ und finden Sie Gleichungen für die Vektoren $b_k \in \mathbb{C}^n$.

Aufgabe 5: (4+4+4 Punkte)

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Ist f stetig?

b. Ist f partiell differenzierbar?

c. Ist f differenzierbar?

Aufgabe 6: (5+5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = x^2y + e^x + z$.

a. Zeigen Sie: Es gibt offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}$ von 0 und $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(1,-1)$ und ein $g : U \to V$ stetig differenzierbar, so dass

$$\{(x,y,z) \in V \times U : f(x,y,z) = 0\} = \{(g(y,z),y,z) : (y,z) \in U\}.$$

b. Berechnen Sie $Dg\,(1,-1)$.

Aufgabe 7: (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle globale Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $2x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 8: (4+4+5 Punkte)

Sei $g \in C^1((0,\infty))$ reellwertig. Sei $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $f(x) = g(\|x\|)x$.

a. Seien $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ eine stetig differenzierbare Kurve und $c > 0$, so dass $\|\gamma(t)\| = c$ für alle $t \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma f\,dx = 0.$$

b. Zeigen Sie, dass f rotationsfrei ist, d.h. $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ für jedes $i \neq j$, und für jedes $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

c. Zeigen Sie, dass f ein Gradientenfeld ist.

Aufgabe 9: (10 Punkte)

Für $z, w \in \mathbb{C}$ setze

$$\langle z, w \rangle := \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w \qquad \text{und} \qquad |z| := \langle z, z \rangle^{1/2}$$

Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([-1;1];\mathbb{C})$ zwei Kurven auf $\mathbb{C}$, mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) =: z$ so, dass $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \neq 0$. Der Winkel $\alpha \in [0;\pi]$ zwischen den Kurven γ_1, γ_2 im Punkt z wird durch

$$\cos\alpha = \frac{\langle \gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \rangle}{|\gamma_1'(0)|\,|\gamma_2'(0)|}$$

definiert. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $z \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen den Kurven $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ im Punkt $f(z)$ wieder gleich α ist.

Hinweis: Berechnen Sie $\langle (f \circ \gamma_i)'(0), (f \circ \gamma_j)'(0) \rangle$ und finden Sie eine Beziehung zu $\langle \gamma_i'(0), \gamma_j'(0) \rangle$, für alle $i, j \in \{1, 2\}$.