Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Modulprüfung Analysis 1

23. Februar 2013

Bitte lassen Sie die Klausur geschlossen und den Stift liegen, bis die Bearbeitungszeit eröffnet wird! Lesen Sie solange die untenstehenden Hinweise durch.

Name, Vorname	Matrikelnummer

- Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden = 180 Minuten ab der Eröffnung. Geben Sie vorher ab, so verlassen Sie bitte anschließend das Gebäude.
- Versehen Sie alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer.
- Nach Ende der Bearbeitungszeit heften Sie bitte Ihre Blätter zusammen, legen den Stift weg und warten an ihrem Platz. Sie können ihren Platz verlassen, nachdem *alle* Klausuren eingesammelt sind. *Vorher keine Gespräche!*
- Einziges erlaubtes Hilfsmittel sind zwei Blatt DIN-A4 (jeweils Vorder- und Rückseite, d. h. vier Seiten) mit handgeschriebenen Notizen.
- Handys, Computer, Taschenrechner etc. sind ausgeschaltet in verschlossenen Taschen zu verstauen.
- Bei den Multiple-Choice-Aufgaben zählt nur das Endergebnis. Bei allen anderen Aufgaben muss ihr Vorgehen zumindest stichwortartig begründet sein. Resultate aus der Vorlesung oder den schriftlichen Übungen können ohne Beweis zitiert werden.
- Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte											
max.	20	10	10	10	5	10	5	10	10	10	100

Aufgabe 1: (5+5+5+5 Punkte)

Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist. Falsche Antworten geben einen Minuspunkt, unbeantwortete Fragen geben keinen Abzug. Minuspunkte werden nur innerhalb dieser Aufgabe verrechnet.

a. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

	wahr	falsch
• Existiert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$, dann ist f integrierbar.	☐	☐
• Ist f integrierbar, dann ist f beschränkt und stetig.	☐	☐
• Ist f stetig, dann ist f integrierbar.	☐	☐
• Ist f integrierbar, dann existiert eine Stammfunktion von f.	☐	☐
• Ist f integrierbar, mit $\int_a^b f dx = 0$ für alle $a, b \in [0;1]$, dann ist $f = 0$.	☐	☐

b. Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge und $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

	wahr	falsch
• Sind alle f_n stetig und $f_n \to f$ punktweise, so ist f stetig.	☐	☐
• Sind alle f_n stetig und $f_n \to f$ gleichmäßig, so ist f stetig.	☐	☐
• Sind alle f_n differenzierbar auf $(0,1)$ und $f_n \to f$ gleichmäßig, so ist f differenzierbar auf $(0,1)$.	☐	☐
• Sei $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und seien alle f_n stetig differenzierbar mit $f_n' \to g$ gleichmäßig. Dann konvergieren die f_n gleichmäßig.	☐	☐
• Sei $\int_0^1 \lvert f_n(x) - f(x)\rvert \, \mathrm{d}x \to 0$. Dann $f_n \to f$ punktweise.	☐	☐

Fortsetzung auf nächster Seite.

c. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Häufungspunkt $h \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

	wahr	falsch
• Es ist h Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.	☐	☐
• Ist h der einzige Häufungspunkt in $\mathbb{R}$, so konvergiert $a_n \to h$.	☐	☐
• Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann $a_n \to h$.	☐	☐
• Es existiert eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen h konvergiert.	☐	☐
• $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N :\ \|a_n - h\| < \varepsilon$.	☐	☐

d. Es gilt:

	wahr	falsch
• Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar, dann ist f' beschränkt.	☐	☐
• Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius von $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann ist f auf $\{z \in \mathbb{C} : \|z\| < \rho\}$ stetig.	☐	☐
• Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius von $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann $p_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \to f(z)$ gleichmässig auf $\{z \in \mathbb{C} : \|z\| \leq r\}$, für alle $r < \rho$.	☐	☐
• Es existiert eine analytische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für alle $\|x\| > 2$ und $f(x) = 1$ für alle $\|x\| \leq 1$.	☐	☐
• Sei $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und es existiere $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^3 \mathrm{d}x$. Dann existiert auch $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x$.	☐	☐

Aufgabe 2: (3+3+4 Punkte)

a. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 + 3 - \sqrt{x^4 + 6x^2}\right) x^2.$$

b. Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

c. Seien $a_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, p$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_1^n + \cdots + a_p^n\right)^{1/n} = \max_{i=1,\ldots p} a_i.$$

Aufgabe 3: (6+4 Punkte)

a. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k+5}{3k-2}\right)^{3k}$

iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(3k\log(k))}{(k!)^2}$

b. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen in $x \in \mathbb{C}$:

i) $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}\right) x^m$

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} 4k^5\, 3^k\, x^{k^2}$

Aufgabe 4: (5+5 Punkte)

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.

a. Zeigen Sie, dass in allen Punkten $x \in (a, b)$ mit $f(x) \neq g(x)$ die Funktion $\max(f, g)$ differenzierbar ist.

b. Unter welcher Bedingung ist $\max(f, g)$ differenzierbar in einem Punkt $x \in (a; b)$ mit $f(x) = g(x)$?

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $y, x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq y < x$ gilt:

$$ny^{n-1} \leq \frac{x^n - y^n}{x - y} \leq nx^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 6: (6+4 Punkte)

Sei eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 = 1, \qquad a_{k+1} = \sqrt{a_k} + \frac{15}{4},\ k \in \mathbb{N}.$$

a. Zeigen Sie: Die Folge ist konvergent.

b. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 7: (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \right).$$

Aufgabe 8: (4+6 Punkte)

a. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

i) $\int \log(x^2 - 1)\mathrm{d}x$, für $x > 1$

ii) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\mathrm{d}x$, für $x > \sqrt{2}$

b. Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren:

i) $\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$,

ii) $\int_1^2 \frac{1}{(x^2-1)^{1/4}}\mathrm{d}x$,

iii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$.

Aufgabe 9: (2+3+3+2 Punkte)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $f : X \to Y$ so, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in X.$$

Für $x \in X$ und $\delta > 0$ setzen wir

$$s(x, \delta) := \sup \left\{ d_Y(f(x_1), f(x_2)) : x_1, x_2 \in B_\delta(x) \right\}.$$

a. Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$s(x) := \lim_{\delta \downarrow 0} s(x, \delta)$$

existiert.

b. Zeigen Sie, dass f an der Stelle $x \in X$ stetig ist genau dann, wenn $s(x) = 0$.

c. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Menge

$$A_n := \left\{ x \in X : s(x) < \frac{1}{n} \right\}$$

offen ist.

d. Zeigen Sie, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen ist.

Aufgabe 10: (5+5 Punkte)

Sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom mit $z \in \mathbb{C}$ und komplexen Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots a_0$.

a. Zeigen Sie, dass $|P(z)|$ divergiert für $z \to \infty$, d. h.

$$\forall M > 0 \quad \exists R > 0 : |z| > R \Rightarrow |P(z)| > M.$$

b. Zeigen Sie, dass $|P(z)|$ als Funktion von z auf $\mathbb{C}$ ihr Infimum annimmt.