Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Nachklausur Analysis 1

23. März 2013

Bitte lassen Sie die Klausur geschlossen und den Stift liegen, bis die Bearbeitungszeit eröffnet wird! Lesen Sie solange die untenstehenden Hinweise durch.

Name, Vorname	Matrikelnummer

- Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden = 180 Minuten ab der Eröffnung. Geben Sie vorher ab, so verlassen Sie bitte anschließend das Gebäude.
- Versehen Sie alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer.
- Nach Ende der Bearbeitungszeit heften Sie bitte Ihre Blätter zusammen, legen den Stift weg und warten an ihrem Platz. Sie können ihren Platz verlassen, nachdem *alle* Klausuren eingesammelt sind. *Vorher keine Gespräche!*
- Einziges erlaubtes Hilfsmittel sind zwei Blatt DIN-A4 (jeweils Vorder- und Rückseite, d. h. vier Seiten) mit handgeschriebenen Notizen.
- Handys, Computer, Taschenrechner etc. sind ausgeschaltet in verschlossenen Taschen zu verstauen.
- Bei den Multiple-Choice-Aufgaben zählt nur das Endergebnis. Bei allen anderen Aufgaben muss ihr Vorgehen zumindest stichwortartig begründet sein. Resultate aus der Vorlesung oder den schriftlichen Übungen können ohne Beweis zitiert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe	Note
Punkte											
max.	10	10	15	10	10	10	10	10	15	100	

Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Aufgabe 1: (5+5 Punkte)

Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist. Falsche Antworten geben einen Minuspunkt, unbeantwortete Fragen geben keinen Abzug. Minuspunkte werden nur innerhalb dieser Aufgabe verrechnet.

a. Es gilt:

	wahr	falsch
• Die Funktion $f(x) := e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, hat keine Stammfunktion.	☐	☐
• Sei f_n eine Folge von auf $[a;b]$ integrierbaren Funktionen, sodass $f_n \to f$ gleichmässig. Dann ist f auf $[a;b]$ integrierbar, und $\int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx$.	☐	☐
• Als Folge in $C([0,1])$ hat $f_n(x) = x^n$ keine konvergente Teilfolge.	☐	☐
• Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist in $x = 0$ differenzierbar.	☐	☐
• Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.	☐	☐

b. Es gilt:

	wahr	falsch
• Die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ist kompakt in $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
• Betrachte $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$, versehen mit der Standardmetrik. Dann gilt $\overline{\mathring{\mathbb{Q}}} = \mathring{\overline{\mathbb{Q}}}$.	☐	☐
• Die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\} \subset \mathbb{R}$ besitzt eine endliche offene Überdeckung.	☐	☐
• Die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\} \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.	☐	☐
• Sei $M = \mathbb{R}^n$ und seien $A, B \subset M$ kompakt. Dann ist $A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}$ kompakt.	☐	☐

Aufgabe 2: (6+4 Punkte)

a. Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{3x+2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$,

(ii) $g(x) = \log\left((x + \sin x)^2\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(iii) $h(x) = x^{\sin\sqrt{x}}, \quad x > 0$.

b. Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) := (1 + x)\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: (6+5+4 Punkte)

a. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i) $\lim_{k\to\infty} \log\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right)$,

ii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)$.

b. Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge

$$z_n = (n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i\,\frac{n+e}{2n+1}(-1)^n.$$

c. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1.$$

Aufgabe 4: (4+3+3 Punkte)

Es sei $f_n(x) = 2n\left((2x)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$, $x \in [1, \infty)$, eine Funktionenfolge.

a. Zeigen Sie, dass f_n punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$.

Hinweis: Schreiben Sie $(2x)^{1/n} = \exp\left((1/n)\log(2x)\right)$.

b. Zeigen Sie, dass die Konvergenz auf dem Intervall $[1, 2]$ gleichmäßig ist.

c. Ist die Konvergenz gleichmäßig auf $[1, \infty)$?

Aufgabe 5: (5+5 Punkte)

Sei M ein metrischer Raum mit Metrik d. Für $x \in M$ und $\delta > 0$ definieren wir die offene Kugel

$$B_\delta(x) = \{y \in M : d(x,y) < \delta\}$$

sowie die abgeschlossene Kugel

$$R_\delta(x) = \{y \in M : d(x,y) \leq \delta\}$$

von Radius δ um x. Weiter ist der Abschluss von $B_\delta(x)$ gegeben durch

$$\overline{B_\delta(x)} = \{y \in M : \text{es existiert eine Folge } y_n \text{ in } B_\delta(x) \text{ mit } y_n \to y\}.$$

a. Sei $M = \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(x;y) = |x-y|$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\overline{B_\delta(x)} = R_\delta(x) \quad \forall \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b. Sei $M = \mathbb{R}$ mit der diskreten Metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}.$$

Gilt in diesem Fall $\overline{B_\delta(x)} = R_\delta(x)$ für alle $\delta > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

i) $\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$, für $x \in \mathbb{R}$;

ii) $\int \frac{\exp(\sqrt{t}+1)}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$, für $t > 0$;

iii) $\int \frac{1}{t^{2/3}+t^{3/4}} \, \mathrm{d}t$, für $t > 0$.

Aufgabe 7: (5+5 Punkte)

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und es existiere das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$. Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch geeignetes Gegenbeispiel:

a. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

b. Es existiert eine Folge x_n in $[0,\infty)$, mit $x_n \to \infty$, so dass $f(x_n) \to 0$.

Aufgabe 8: (10 Punkte)

Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

Zeigen Sie: Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für jede Folge x_n in $(0;1]$ mit $x_n \to 0$ gilt:

$$f(x_n) \to c \quad \text{für } n \to \infty.$$

Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Das bedeutet, dass $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = c$.

Aufgabe 9: (3+4+4+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

b. Zeigen Sie, dass der Bildraum $f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ abgeschlossen ist.

c. Zeigen Sie, dass der Bildraum $f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ offen ist.

d. Zeigen Sie, dass f invertierbar ist und, dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass $|(f^{-1})'(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.