Nachklausur Analysis 2

23. September 2013

Bitte lassen Sie die Klausur geschlossen und den Stift liegen, bis die Bearbeitungszeit eröffnet wird! Lesen Sie solange die untenstehenden Hinweise durch.

Name, Vorname	Matrikelnummer

- Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden = 180 Minuten ab der Eröffnung. Geben Sie vorher ab, so verlassen Sie bitte anschließend das Gebäude.
- Versehen Sie alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer.
- Nach Ende der Bearbeitungszeit heften Sie bitte Ihre Blätter zusammen, legen den Stift weg und warten an ihrem Platz. Sie können ihren Platz verlassen, nachdem *alle* Klausuren eingesammelt sind. *Vorher keine Gespräche!*
- Einziges erlaubtes Hilfsmittel sind zwei Blatt DIN-A4 (jeweils Vorder- und Rückseite, d. h. vier Seiten) mit handgeschriebenen Notizen.
- Handys, Computer, Taschenrechner etc. sind ausgeschaltet in verschlossenen Taschen zu verstauen.
- Bei allen Aufgaben muss ihr Vorgehen zumindest stichwortartig begründet sein. Resultate aus der Vorlesung oder den schriftlichen Übungen können ohne Beweis zitiert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe	Note
Punkte											
max.	10	15	10	10	10	10	13	12	10	100	

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f \in C^1([a,b])$ mit $f(a) = f(b) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g \in C([-\pi;\pi])$ definiert durch

$$g(x) = f\left(a + \frac{(b-a)}{\pi} x\right)$$

für $x \in [0;\pi]$, und durch die Bedingung $g(-x) = -g(x)$.

Aufgabe 2: (5+5+5 Punkte)

a. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy'(x) + y(x) = x^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(1) = 0$.

b. Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2y''(x) + 3y'(x) + y(x) = x^2.$$

c. Finden Sie alle Anfangswerte $y_0 \in \mathbb{R}^2$, sodass die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = Ay(x), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = y_0,$$

die Eigenschaft hat, dass $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Aufgabe 3: (5+5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{für } y > 0 \\ x & \text{für } y = 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

a. Zeigen Sie: Jede Richtungsableitung von f existiert in $(0,0)$.

b. Zeigen Sie: Die Funktion f ist im Punkt $(0,0)$ nicht differenzierbar.

Aufgabe 4: (4+2+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und V eine Stammfunktion von $-f$, d. h. $V' = -f$. Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) = f(y(x)).$$

a. Zeigen Sie, dass die Funktion $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$E(x) := \frac{1}{2}\big(y'(x)\big)^2 + V\big(y(x)\big),$$

konstant ist.

b. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $E \in \mathbb{R}$ so, dass

$$y'(x) = \begin{cases} \sqrt{2\big(E - V(y(x))\big)} & \text{für } x \text{ mit } y'(x) \geq 0, \\ -\sqrt{2\big(E - V(y(x))\big)} & \text{für } x \text{ mit } y'(x) \leq 0 \end{cases}$$

erfüllt ist.

c. Sei $\alpha > 0$. Finden Sie die Lösung $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y''(x) = -\frac{\alpha}{y^2(x)}, \quad y(0) = y_0 > 0, \quad y'(0) = v_0 > 0$$

für den Fall $\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\alpha}{y_0} = 0$.

Aufgabe 5: (4+3+3 Punkte)

a. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z^3 + z + xy = 1$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = g(x, y)$ hat.

b. Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie $Dg(x, y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (es genügt, wenn Sie die Ableitung als Funktion von x, y und $g(x, y)$ schreiben).

c. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entscheiden Sie jeweils ob es sich um ein lokales Extremum oder um einen Sattelpunkt handelt.

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant. Zeigen Sie: $f(\mathbb{C}) = \{f(z) : z \in \mathbb{C}\}$ ist dicht in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 7: (7+6 Punkte)

Für eine Matrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sei R^T die Transponierte von R, definiert durch $(R^T)_{ij} = R_{ji}$, für alle $i, j = 1, \dots, n$. Sei weiter $1_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die $n\times n$-Einheitsmatrix.

a. Zeigen Sie, dass die Menge

$$O(n) = \{R \in \mathbb{R}^{n\times n} : R^T R = 1_n\}$$

eine C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

b. Berechnen Sie den Tangentialraum $T_{1_n}O(n)$ (Sie dürfen das Resultat von Teil a. verwenden).

Aufgabe 8: (6+6 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 2x^3 - 12x + 3y^2 + 6xy.$$

a. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder einen Sattelpunkt handelt.

b. Sei nun $f|_D$ die Einschränkung von f auf die Menge

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ und } y \leq 1 \text{ und } x - y \leq 1\}.$$

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f|_D$.

Aufgabe 9: (5+5 Punkte)

Gegeben Sei die Kurve $\gamma : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cos t)$, sowie das Vektorfeld $K_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $K_\alpha(x, y, z) = (2xy, 3y^2z + \alpha x^2, y^3 + z)$ mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist K_α konservativ? Finden Sie für dieses α eine Potentialfunktion von K_α.

b. Berechnen Sie das Linienintegral

$$\int_\gamma K_\alpha \cdot dx\,.$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.