Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Präsenzübung 1

V1G1 – Analysis 1

Aufgabe 1: Logik - finden Sie den Fehler!

Finden Sie den Fehler in den folgenden Beweisen:

a. Behauptung: Jede Kaffeesorte schmeckt gleich.
Beweisstrategie: Wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gezeigt wird, dass in jeder Menge von n Kaffeesorten jede Kaffeesorte gleich schmeckt, dann ist die Behauptung gezeigt.
Induktionsanfang $n = 1$: Bei $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich erfüllt.
Induktionsschritt $n \to n + 1$: Sei $K = \{k_1, \ldots, k_{n+1}\}$ eine Menge von $n + 1$ Kaffeesorten. Sei $K_j := K \setminus \{k_j\}$, $1 \leq j \leq n + 1$, dann schmeckt nach Induktionsvoraussetzung jede Kaffeesorte aus K_j gleich.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion schmeckt jede Kaffeesorte gleich.

b. Seien M, N Mengen, $f : M \to N$ eine Abbildung, $A, B \subset M$. Zu zeigen ist: $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$.
Beweis:

$$\begin{aligned} y \in f(A \setminus B) &\implies \exists x \in A \setminus B : \ f(x) = y \\ &\implies x \in A \text{ und } x \notin B \\ &\implies f(x) \in f(A) \text{ und } f(x) \notin f(B) \\ &\implies y = f(x) \in f(A) \setminus f(B). \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Das Prinzip der vollständigen Induktion (Wiederholung)

Zeigen Sie folgende Aussagen.

a. Seien $q \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ und $n \geq 0$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

b. Sei $n \geq 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 3: Indexverschiebung

Zeigen Sie durch eine Indexschiebung folgende Gleichung.

a. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Dann gilt:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=4}^{n+2} \frac{1}{k-2} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.$$

b. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k m^{k-1} = n(1+m)^{n-1}.$$

Hinweis: Wenden Sie $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b)^n$ an.

Aufgabe 4: Das Prinzip der vollständigen Induktion

Zeigen Sie folgende Aussagen.

a. Für jedes $n, k \in \mathbb{N}_0$, wobei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{n+k+1}{n}.$$

b. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Man finde und beweise eine ähnliche Formel für das Produkt

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2 \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 \left(1+\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}.$$

c. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $1 + 2^{2^n} + 2^{(2^{n+1})}$ durch 7 teilbar.

Aufgabe 5: Das Prinzip der vollständigen Induktion (schwer)

Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $0 < a_1 < \ldots < a_n$. Zeigen Sie:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^3.$$

Aufgabe 6: Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Betrachten Sie folgende Teilmengen $M \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und untersuchen Sie, ob diese Teilmengen eine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ darstellen. Falls ja, untersuchen Sie f auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität:

a. $M = \{(a, a^2) : \; a \in \mathbb{Z}\}$,

b. $M = \{(a^2, a) : \; a \in \mathbb{Z}\}$,

c. $M = \{(a-1, a+1) : \; a \in \mathbb{Z}\}$,

d. $M = \left\{\left(a, \frac{a}{|a|}\right) : \; a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$,

e. $M = \{(a+2012, 37 * a) : \; a \in \mathbb{Z}\}$,

f. $M = \{(a, a+1) : \; a \in \mathbb{Z}, a \leq 0\} \bigcup \{(a, a-1) : \; a \in \mathbb{Z}, a \geq 1\}$,

g. $M = \{(a-1, a) : \; a \in \mathbb{Z}, a \leq 0\} \bigcup \{(a, a) : \; a \in \mathbb{Z}, a \geq 1\}$.

Aufgabe 7: Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Zeigen Sie:

a. Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $g \circ f$ surjektiv.

b. Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.

c. Wenn f und g injektiv sind, dann ist $g \circ f$ injektiv.

d. Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

e. Wenn f surjektiv, aber g nicht injektiv ist, dann ist $g \circ f$ nicht injektiv.