Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Präsenzübung 11

V1G1 – Analysis 1

Aufgabe 1: Ableitungen

Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a. $\arcsin(x)$,

b. $\dfrac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$,

c. $\sqrt{\log(2012 + \log(2013 + x^2))}$.

Aufgabe 2: Differenzierbare Funktionen

Bestimmen Sie alle differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f' = f$.
Hinweis: Betrachen die Ableitung von $e^{-1}f(x)$.

Aufgabe 3: Fermatsches Prinzip und Brechnungsgesetz

Seien $M_1 := \mathbb{R} \times (0, \infty)$ und $M_2 := \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$. In zwei homogenen Medien M_1 und M_2 seien die Ausbreitungsgeschwindigkeiten für Licht $v_1 > 0$ bzw. $v_2 > 0$. Gesucht wird der schnellste Weg von einem Punkt $A_1 = (0, h_1)$ des ersten Mediums zu einem Punkt $A_2 = (a, h_2)$ des zweiten, wobei $h_1, h_2 \neq 0$ angenommen wird, und dass der schnellste Weg zwischen zwei Punkten innerhalb eines Mediums geradlinig verläuft.

a. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $P = (x, 0)$. Bestimmen Sie die Zeit $t(x)$ für den Weg von A_1 über P nach A_2.

b. Bestimmen Sie ein Minimum von t. Ist dieses Minimum eindeutig?

c. Leiten Sie eine Formel für den Ausdruck $\frac{v_1}{v_2}$ in Abhängigkeit des Austrittswinkels des Lichtstrahls aus dem Medium M_1 bei P und des Brechnungswinkels des Lichtstrahls in M_2 bei P. Dabei ist der Austrittswinkel der Winkel zwischen $\overline{(0, \infty)P}$ und $\overline{PA_1}$; der Brechnungswinkel ist der Winkel zwischen $\overline{(0, -\infty)P}$ und $\overline{PA_2}$.