

Präsenzübung 12

V1G1 – Analysis 1

Aufgabe 1: Extremwertaufgabe

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf absolute Extrema

- a. $f(x) = xe^x$ für $x \in [-2, 2]$,
- b. $f(x) = x^3 - 3x - 2$ für $x \in [-3, 3]$.

Aufgabe 2: Abstandsproblem

Sei $M := \{(x, y) : y = 3x - x^2, x \in [0, 3]\}$. Bestimmen Sie denjenigen Punkt $(x_0, y_0) \in M$ so, dass

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \max_{(x,y) \in M} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Aufgabe 3: Umzäunungsproblem

Aus einem Draht der Länge L forme man einen Kreis und ein Quadrat so, dass die Summe der Flächeninhalte möglichst groß wird.

Aufgabe 4: Extremwertaufgabe

Untersuchen Sie $f(x) = |2 \sin(x)| - |\cos(2x)|$ für $x \in [0, \pi]$ absolute Extrema.

Aufgabe 5: Ableitung

Berechnen Sie ggf. die Ableitung von $f(x) = |x^3 + x^2 - x - 1|$ in $x_0 = -1$ und $x_1 = 1$.

Aufgabe 6: Extremwertaufgabe

Untersuchen Sie $f(x) = |x^2 + 2x| + |x| - (2x + x^2)$ für $x \in [-3, 1]$ auf absolute Extrema.

Aufgabe 7: Taylor

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f \in C^2((a, \infty))$. Zeigen Sie

$$\left(\sup_{x \in (a, \infty)} f'(x) \right)^2 \leq 4 \left(\sup_{x \in (a, \infty)} f(x) \right) \left(\sup_{x \in (a, \infty)} f''(x) \right).$$

Aufgabe 8: Extremwertaufgabe

Bestimmen Sie das Verhältnis von Radius r und Höhe h eines Zylinders gegebenen Inhalts, wenn die Oberfläche minimal ist.

Aufgabe 9: Taylor

Zeigen Sie für $x > 0$

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$$

Aufgabe 10: Taylor

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall. Zeigen Sie: Zu jedem $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\left| f(a) + f(b) - 2 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq C(b-a)^2 \quad \forall a, b \in I.$$