Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Präsenzübung 5
V1G1 – Analysis 1

Aufgabe 1: Konvergenz von Folgen

Seien $a_n, b_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\frac{a_n}{b_n} \to \sqrt{2}$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{b_n} \to 0$.

Aufgabe 2: Rechnen in $\mathbb{R}$

Sei $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| < 1$ und sei $(w_k)_{k \geq n}$ eine Folge mit $\frac{w_{k+1}}{w_k} = z$ für alle $k \geq n$. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=n}^{\infty} w_k = \frac{w_n}{1-z}.$$

Aufgabe 3: Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/n} - 1\right)$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^7 \cdot 2^{n+1}}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$. (g) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$,

wobei in (g) die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert ist durch

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in \{1 + 4\mathbb{N}, 2 + 4\mathbb{N}\}, \\ -1 & \text{falls } n \in \{3 + 4\mathbb{N}, 4\mathbb{N}\}. \end{cases}$$