Präsenzübung 6

V1G1 – Analysis 1

Aufgabe 1: Konvergenz von Reihen und Umordnung

Sei $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}$ eine absolut konvergente Reihe. Sei $b_k := 2^{-(k+1)} \sum_{j=0}^{k} 2^j a_j$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergiert.

Aufgabe 2: Konvergenz von Folgen und Reihen

Entscheiden Sie, welche Aussagen richtig sind.

(a) (a_n) sei eine Folge und $d_n := \frac{1}{4}(a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n)$. Man betrachte die beiden Aussagen $A =$"$\sum_n^{\infty} a_n$ konvergiert" und $B =$"$\sum_n^{\infty} d_n$ konvergiert". Es gilt nun

- ☐ $A \Rightarrow B$ und $A \not\Leftarrow B$
- ☐ $A \not\Rightarrow B$ und $A \Leftarrow B$
- ☐ $A \Leftrightarrow B$
- ☐ $A \not\Rightarrow B$ und $A \not\Leftarrow B$

(b) Man betrachte die beiden Aussagen $A =$"$\sum_n^{\infty} a_n$ konvergiert" und $B =$"$\sum_n^{\infty} a_n^2$ konvergiert". Es gilt

- ☐ $A \Rightarrow B$ und $A \not\Leftarrow B$
- ☐ $A \not\Rightarrow B$ und $A \Leftarrow B$
- ☐ $A \Leftrightarrow B$
- ☐ $A \not\Rightarrow B$ und $A \not\Leftarrow B$

(c) Es sei (a_n) eine Folge mit $a_n > 0$. Man betrachte die beiden Aussagen $A =$"es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ für alle $n \geq N$" und $B =$"$\sum_n^{\infty} a_n$ konvergiert".

- ☐ $A \Rightarrow B$ und $A \not\Leftarrow B$
- ☐ $A \not\Rightarrow B$ und $A \Leftarrow B$
- ☐ $A \Leftrightarrow B$
- ☐ $A \not\Rightarrow B$ und $A \not\Leftarrow B$

(d) Es sei (a_n) eine Folge mit $a_n > 0$. Man betrachte die beiden Aussagen $A =$"$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ für unendlich viele n" und $B =$"$\sum_n^{\infty} a_n$ divergiert".

- ☐ $A \Rightarrow B$ und $A \not\Leftarrow B$
- ☐ $A \not\Rightarrow B$ und $A \Leftarrow B$
- ☐ $A \Leftrightarrow B$
- ☐ $A \not\Rightarrow B$ und $A \not\Leftarrow B$

Aufgabe 3: Metrik

1. Sei X eine Menge, und $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ durch $d_1(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$ definiert.

   Zeigen Sie, dass d_1 eine Metrik ist und bestimme die durch d_1 induzierten offenen Mengen.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ durch $d_2(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$ definiert. Beweisen oder widerlegen Sie: d_2 ist eine Metrik auf X.

3. Beweisen oder widerlegen Sie: $d_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d_3(x,y) = (x-y)^2$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

4. Beweisen oder widerlegen Sie: $d_4 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d_4(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$.