Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Präsenzübung 7

V1G1 – Analysis 1

Aufgabe 1: Wiederholung - Rechnenregeln für Mengen

Sei X eine Menge, und $(A_i)_{i\in I}$ mit $A_i \subset X$ für alle $i \in I$ eine Familie von Teilmengen von X. Für beliebiges $B \subset X$ wird mit $B^c := X\backslash B$ das Komplement von B in X bezeichnet. Zeigen Sie die De Morgan'sche Regeln:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Aufgabe 2: Ränder von Mengen

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Beweisen oder widerlegen Sie für $A_i \subset M$, $i \in \mathbb{N}$:

(a) $\partial\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\partial A_i)$;

(b) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\partial A_i) \subset \partial\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)$.

Aufgabe 3: Allgemeines zu Mengen

(a) Es sei $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| > 1\} \bigcup \{0\}$. Bestimmen Sie die Mengen $A^\circ, \overline{A}$ und ∂A.

(b) Es sei $B := \left\{\frac{1+(2n+1)!}{(2n+1)!} : \ n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \{1\}$. Zeigen Sie, dass B kompakt ist.

Aufgabe 4: Kompaktheit

(a) Es seien K_j, $j \in \mathbb{N}_0$, nichtleere kompakte Teilmengen eines metrischen Raumes M, so dass $K_{j+1} \subset K_j$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie, dass dann $\bigcap_{j=0}^\infty K_j \neq \emptyset$ ist.

(b) Es seien M ein metrischer Raum und $S := \{K_j : \ j \in \mathbb{N}_0\}$ eine Familie aus nichtleeren kompakten Teilmengen von M mit $\bigcap_{K\in S} K = \emptyset$. Beweisen Sie, dass dann endlich viele $K_0, \ldots, K_n \in S$ existieren, so dass $K_0 \cap \ldots \cap K_n = \emptyset$ gilt.