Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Präsenzübung 8

V1G1 – Analysis 1

Aufgabe 1: Stetigkeit

Zeigen Sie: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, dann ist f monoton.

Aufgabe 2: Stetigkeit

Seien A, B, C metrische Räume und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen. Ferner gelte

$$\lim_{x \to a} f(x) = \eta, \quad \lim_{y \to \eta} g(\eta) = \xi$$

a. Zeigen Sie: Falls g stetig in $y = \eta$ ist, dann gilt $\lim_{x \to a} g(f(x)) = \xi$.

b. Warum ist die Aussage falsch, falls g nicht stetig ist? Geben Sie hierfür ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 3: Stetigkeit

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{(|x|^2 - 1)(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2)}{1 + |x|^2}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist das Urbild $f^{-1}((-\infty, c)) = \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) < c\}$ beschränkt.

(b) Die Menge $f(\mathbb{R}^3)$ ist von unten beschränkt.

(c) Es gibt eine Folge $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3$ mit $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \inf f(\mathbb{R}^3)$.

(d) Die Menge $f(\mathbb{R}^3)$ besitzt ein Minimum, d.h. es gibt ein $x^* \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x^*) = \inf f(\mathbb{R}^3)$.