Probeklausur

V1G1 – Analysis 1

21. Dezember 2012

Name, Vorname	Matrikelnummer

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe	Note
Punkte												

Die Probeklausur dient der Selbstkontrolle Ihres Lernerfolgs. Daher wird die Klausur von Ihrem Tutor korrigiert werden, die erreichte Punktzahl hat aber *keinen* Einfluss auf Ihre Zulassung zur Modulprüfung oder ihre Modulnote.

Lösen Sie daher bitte die Klausur unter echten Klausurbedingungen:

- Wiederholen Sie **vor** Betrachten der Aufgaben den Vorlesungs- und Übungsstoff sorgfältig.
- Legen Sie sich als einziges erlaubtes Hilfsmittel zwei Blatt DIN-A4 (jeweils Vorder- und Rückseite, d. h. vier Seiten) mit handgeschriebenen Notizen an.
- Nehmen Sie sich 3 Stunden = 180 Minuten ungestörte Bearbeitungszeit.
- Lösen Sie die Aufgaben alleine ohne Hilfe.
- Bei den Multiple-Choice-Aufgaben zählt nur das Endergebnis. Bei allen anderen Aufgaben muss ihr Vorgehen zumindest stichwortartig begründet sein. Resultate aus der Vorlesung oder den schriftlichen Übungen können ohne Beweis zitiert werden.
- Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: (4+4+4+4 Punkte)

Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist. Falsche Antworten geben einen Minuspunkt, unbeantwortete Fragen geben keinen Abzug. Minuspunkte werden nur innerhalb dieser Aufgabe verrechnet.

a. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$.

	wahr	falsch
Dann gilt: $z_n \to z \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$	☐	☐
Dann gilt: $\lvert z_n\rvert \to \lvert z\rvert \quad \Rightarrow \quad z_n \to z$	☐	☐
Dann gilt: $z_n \to z \quad \Rightarrow \quad \lvert z_n\rvert \to \lvert z\rvert$	☐	☐
Dann gilt: $z_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \to z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$	☐	☐

b. Sei K ein Körper. Seien $a, b, c \in K$.

	wahr	falsch
Dann gilt: $(a+b)\,c = ac + bc$	☐	☐
Dann gilt: $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$ für $a \neq 0$	☐	☐
Dann gilt: $a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$	☐	☐
Dann gilt: $a + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$	☐	☐

c. Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $A \neq \emptyset$. Sei $-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$.

	wahr	falsch
Dann gilt: A ist unbeschränkt $\quad \Leftrightarrow \quad \sup A = \infty$	☐	☐
Dann gilt: A ist endlich $\quad \Rightarrow \quad \max A = \sup A$	☐	☐
Dann gilt: Falls $\min A$ existiert, so ist $\min A = -\max(-A)$.	☐	☐
Dann gilt: $\sup A \notin A$	☐	☐

d. Sei $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$.

	wahr	falsch
Dann gilt: $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ stetig $\quad \Rightarrow \quad \exists\, x \in [-a,a] : f(x) = \sup_{y\in[-a,a]} f(y)$	☐	☐
Dann gilt: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und $\lvert f(0)\rvert = \lvert z\rvert = \lvert f(1)\rvert \;\Rightarrow\; \exists\, x \in [0,1] : f(x) = z$	☐	☐
Dann gilt: Es gibt ein surjektives $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$.	☐	☐
Dann gilt: Ist $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gibt ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 ein lokales Extremum.	☐	☐

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade (d. h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), differenzierbare Funktion.

Zeigen Sie: Dann ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, d. h. $f'(-x) = -f'(x)$.

Aufgabe 4: (jeweils 2 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a. $\limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$

b. $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2}$

c. $\liminf_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)}$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}$

e. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x x^5}{x^x}$

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Sei $f : M_1 \to M_2$ gleichmässig stetig.

Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M_1, so ist $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M_2.

Aufgabe 6: (jeweils 2 Punkte pro Reihe)

a. Bestimmen Sie für die folgenden Reihen ob sie konvergent und ob sie absolut konvergent sind.

$$\text{(i)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{3k^3+1}, \qquad \text{(ii)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}, \qquad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

b. Bestimmen Sie die Konvergenzradien (bzgl. $z \in \mathbb{C}$) der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(5 - \frac{2}{n}\right)^n z^n, \qquad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} n^n z^n, \qquad \text{(iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

Aufgabe 7: (6+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ für } x \neq 0 \quad \text{und} \quad f(0) = 0.$$

a. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b. Ist f' an der Stelle $x = 0$ stetig?

Aufgabe 8: (jeweils 2 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ der folgenden Funktionen:

a. $f(x) = \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ für $x \in (0,1)$

b. $f(x) = \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$ für $a, b > 0$ und $x \neq a/b$

c. $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2}$ für $x \in (0,1)$

d. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ für $x > 0$

e. $f(x) = \log\left((\tan x)^{-1/3}\right)$ für $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Aufgabe 9: (4+6 Punkte)

Seien (X_i, d_i), $i = 1, \dots n$ metrische Räume. Sei

$$X_1 \times \dots \times X_n := \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_j \in X_j \ \forall_{j=1,\dots n}\}$$

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_1 \times \dots \times X_n$ definieren wir

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j).$$

a. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $X_1 \times \dots \times X_n$ ist.

b. Beweisen Sie, dass $X_1 \times \dots \times X_n$ genau dann kompakt ist, wenn alle $X_1, \dots X_n$ kompakt sind.

Aufgabe 10: (10 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, und es sei $f_n : K \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, sodass $f_n \to f$ punktweise. Weiterhin gelte für alle $x \in K$, dass

$$n \geq m \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \geq f_m(x).$$

Zeigen Sie: Es konvergiert $f_n \to f$ gleichmässig.