Prof. Dr. Benjamin Schlein
Niels Benedikter, Allan Chan

Probeklausur Analysis 2

04. Juli 2013

Aufgabe 1: (4+4 Punkte)

Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist. Falsche Antworten geben einen Minuspunkt, unbeantwortete Fragen geben keinen Abzug. Minuspunkte werden nur innerhalb dieser Aufgabe verrechnet.

a. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$. Es gilt:

	wahr	falsch
• Falls f auf U differenzierbar ist, dann exisitieren alle partiellen Ableitungen von f und sind stetig auf U.	☐	☐
• Falls alle partiellen Ableitungen von f auf U existieren und stetig sind, dann ist $f \in C^1(U)$.	☐	☐
• Falls alle partiellen Ableitungen von f existieren, dann ist f stetig.	☐	☐
• Falls $f \in C^2(U)$, dann ist $\partial_{x_i}\partial_{x_j} f = \partial_{x_j}\partial_{x_i} f$ für alle $i, j \leq n$.	☐	☐

b. Im Folgenden sei K ein Vektorfeld. Es gilt:

	wahr	falsch
• Falls K konservativ ist, dann ist K ein Gradientenfeld.	☐	☐
• Falls K ein Gradientenfeld ist, dann ist K konservativ.	☐	☐
• Falls $\partial K_i/\partial_{x_j} = \partial K_j/\partial_{x_i}$ auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, dann ist K ein Gradientenfeld.	☐	☐
• Das Vektorfeld $K(x) = x/\|x\|^3$ auf $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ ist konservativ.	☐	☐

Aufgabe 2: (4+4+2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung von

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - \pi^2 & x \in [0, \pi/2], \\ 8\pi x - 3\pi^2 - 4x^2 & x \in]\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

a. Zeigen Sie, dass $f \in C^1(\mathbb{R})$.

b. Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

c. Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Aufgabe 3: (3+3+4 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{R})$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, der folgenden Differentialgleichnugen:

a. $y'(x) = e^{y(x)} \sin(x)$,

b. $y'(x) = 2y(x) + x^2 e^{2x}$,

c. $y'(x) = \dfrac{y^2(x)/x^2}{1 + y(x)/x}$.

Hinweis zu (c): Betrachten Sie eine geeignete Substitution.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ heisst schiefsymmetrisch falls $a_{ji} = -a_{ij}$ für alle $1 \le i, j \le n$. Zeigen Sie dass A genau dann schiefsymmetrisch ist, wenn für jede Lösung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y'(x) = Ay(x)$ ist $\|\phi(x)\|$ unabhängig von x.

Aufgabe 5: (5+5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = 2x^3 - 12x + 3y^2 + 6xy$.

a. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und begründen Sie jeweils, ob es sich dabei um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder einen Sattelpunkt handelt.

b. Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 1\}$. Bestimmen Sie die globalen Extrema der auf D eingeschränkten Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2uv \\ x^3 + y^3 &= v^3 - u^3 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(-1, 1)$ eine Funktion $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ mit $g(-1, 1) = (1, 1)$ implizit definiert wird. Berechnen Sie $Dg(-1, 1)$.

Aufgabe 7: (4+6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x, y, z) = (y, xz, x^2)$.

a. Ist f ein Gradientenfeld?

b. Berechnen Sie $\int_\gamma f\, dx$, wobei γ den Rand des Dreiecks mit Eckpunkten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

Aufgabe 8: (10 Punkte)

Seien $C = (c_{ik})_{1 \leq i,k \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $P_C : C^2(\mathbb{R}^n) \to C^0(\mathbb{R}^n)$ der Differentialoperator

$$P_C(f) = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} \partial_i \partial_k f.$$

Zeigen Sie: Gilt für jedes $R \in \mathrm{SO}\,(n)$

$$\left(P_C(f \circ R)\right)(x) = \left(P_C f\right)(Rx)$$

dann gibt es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $P_C = \lambda \Delta$, wobei Δ der Laplace-Operator ist.